

1. Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций непрерывных на отрезке.

Мн-во всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, \dots, x_m)$ m чисел $x_1, \dots, x_m$ называется **m -мерным координатным пр-вом A^m** .

Координатное пр-во A^m называется **m -мерным евклидовым пр-вом E^m** , если между $\forall$ двумя точками $M'(x'_1, \dots, x'_m)$ и

$M''(x''_1, \dots, x''_m)$ координатного пр-ва A^m определено расстояние :

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + \dots + (x''_m - x'_m)^2}$$

Если каждой точке M из $\{M\}$ точек E^m ставится в соответствие по известному закону некоторое число u , то говорят, что на мн-ве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$. $\{M\}$ – **область задания функции $u = f(M)$** . Число u , соответствующее данной M из $\{M\}$ – **частное значение функции в M** . Совокупность $\{u\}$ всех частных значений $u = f(M)$ – **множество значений** этой функции.

О1. Число b называется **предельным значением** функции $u = f(M)$ в точке A (**пределом функции при $M \rightarrow A$**), если для $\forall$ сходящейся к A последовательности $M_1, M_2, \dots, M_n \dots$ точек мн-ва $\{M\}$, элементы M_n которой отличны от A ($M_n \neq A$), соответствующая послед-сть $f(M_1), \dots, f(M_n), \dots$ значений функции сходится к b .

О2. Число b называется **предельным значением** функции $u = f(M)$ в точке A , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$: для всех точек M из области задания функции, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, \dots, x_m) = b$$

3. О1 и О2 эквивалентны.

Док-во. 1. Пусть b – предел по О1, но не предел по О2 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: для сколь угодно малого $\delta \exists M$ из области задания $f(M)$:

$0 < \rho(M, A) < \delta$, но $|f(M) - b| \geq \varepsilon \Rightarrow$ для $\forall \delta_n = 1/n$

$\exists M_n : 0 < \rho(M_n, A) < \delta$, но $|f(M_n) - b| \geq \varepsilon$.

Из $0 < \rho(M_n, A) < \delta \Rightarrow \{M_n\} \rightarrow A \Rightarrow$ по О1 $\{f(M_n)\} \rightarrow b \Rightarrow$ противоречит $|f(M_n) - b| \geq \varepsilon$

2. Пусть b – предел по О2 и $\{M_n\} \rightarrow A$. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, по О2 $\exists \delta > 0: \forall M$ из области задания $f(M) : 0 < \rho(M, A) < \delta$ выполняется $|f(M) - b| < \varepsilon$. Т.к. $\{M_n\} \rightarrow A$, то для этого δ найдется N : $0 < \rho(M_n, A) < \delta$ при $n \geq N \Rightarrow |f(M_n) - b| < \varepsilon$ при $n \geq N \Rightarrow \{f(M_n)\} \rightarrow b$.

О3. Число b называется **предельным значением** функции $y=f(M)$ при $M \rightarrow \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists a > 0$: для всех M из области задания функции, удовлетворяющих условию $\rho(O, M) > a$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Сформулированное выше понятие предела функции нескольких переменных по совокупности переменных не следует путать с понятием предела по направлению и с понятием повторного

предела. Например, для функции $y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^2}$, опре-

делённой всюду, кроме начала координат, предел в начале координат вдоль любой прямой $x_2 = k \cdot x_1$ равен нулю, существуют повторные пределы $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0$ и $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0$,

но предел функции f в начале координат не существует. В самом деле, при стремлении точки к началу координат вдоль параболы $x_2 = k \cdot x_1^2$ ($k = \text{const} \neq 0$) значение функции f постоянно и равно $\frac{k}{1+k^2}$; оно зависит от выбора этой параболы.

Пример функции, имеющей предел в единственной точке $x = 0$. $x \in R$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рационально}; \\ -x, & \text{если } x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

У. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в A пределы b и c . Тогда функции $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M) / g(M)$ имеют в A пределы (частное при $c \neq 0$), равные соответственно $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, b/c .

Для док-ва взять $\forall \{M_n\} \rightarrow A$, по условию $\{f(M_n)\} \rightarrow b$, $\{g(M_n)\} \rightarrow c \Rightarrow$ по св-вам сходящихся послед-стей:
 $\{f(M_n) \pm g(M_n)\} \rightarrow b \pm c$, $\{f(M_n) \cdot g(M_n)\} \rightarrow b \cdot c$,
 $\{f(M_n) / g(M_n)\} \rightarrow b / c$. В силу произвольности $\{M_n\}$:
 $\lim_{M \rightarrow A} (f(M) + g(M)) = b + c$ и др. утверждения.

Функция $f(M)$ удовлетворяет в точке $\bar{M} = A$ условию Коши, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$: для $\forall M'$ и M'' из области задания функции $f(M)$, удовлетворяющих $0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$, для соответствующих значений функций: $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$

Т(критерий Коши). Чтобы функция $f(M)$ имела конечное предельное значение в точке $M = A$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(M)$ удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Док-во. Необх-сть. Пусть $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, по О2 для $\varepsilon / 2 \exists \delta > 0$: для $\forall M'$ и M'' из области задания $f(M)$:

$0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$ для соответ-щих значений функций:
 $|f(M') - b| < \varepsilon / 2$, $|f(M'') - b| < \varepsilon / 2 \Rightarrow |f(M') - f(M'')| = |f(M') - b - [f(M'') - b]| \leq$
 $\leq |f(M') - b| + |f(M'') - b| < \varepsilon \Rightarrow f(M)$ удовлетворяет в точке $M = A$ условию Коши.

условие Коши.

Дост–сть. Пусть $f(M)$ удовлетворяет в точке $M = A$ условию Коши и $\{M_n\} \rightarrow A$, $M_n \neq A$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$, чтобы выполнялось условие Коши, для этого δ выберем номер $N : 0 < \rho(M_n, A) < \delta$ при $n \geq N$ (это можно сделать, т.к. $\{M_n\} \rightarrow A \Rightarrow$ для $\forall p (=1, 2, \dots)$

$0 < \rho(M_{n+p}, A) < \delta$ при $n \geq N \Rightarrow$ в силу условия Коши $|f(M_{n+p}) - f(M_n)| < \varepsilon$ при $n \geq N \Rightarrow$ фундаментальность послед–сти $\{f(M_n)\} \Rightarrow$ сходимости $\{f(M_n)\}$ к некоторому b .

Возьмем $\forall \{M_n\} \rightarrow A$, $\{M_n'\} \rightarrow A$, пусть $\{f(M_n)\} \rightarrow b$, $\{f(M_n')\} \rightarrow b'$. Тогда посл–сть $M_1, M_1', \dots, M_n, M_n'$ сходится к $A \Rightarrow f(M_1), f(M_1'), \dots, f(M_n), f(M_n')$ сходится, а т.к. все ее подпоследовательности сходятся к одному и тому же пределу, то $b = b'$.

Пусть $A \in$ области задания $u = f(M)$ нескольких переменных и $\forall \varepsilon$ –окрестность A содержит $\neq A$ точки области задания $f(M)$.

О1. Ф–я $u = f(M)$ называется непрерывной в A , если предел этой функции в точке A $\exists$ и равен $f(A)$.

$$A = \lim_{M \rightarrow A} M \Rightarrow \lim_{M \rightarrow A} f(M) = f\left(\lim_{M \rightarrow A} M\right)$$

О2. Ф–я $u = f(M)$ называется непрерывной в A , если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: для всех M из области задания функции: $\rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

О3. Ф–я $u = f(M)$ называется непрерывной на мн–ве $\{M\}$, если она непрерывна в $\forall$ точке $\{M\}$.

Пусть для $\forall M(x_1, \dots, x_m)$ из области задания ф–ции и $A(a_1, \dots, a_m) : x_1 - a_1 = \Delta x_1, \dots, x_m - a_m = \Delta x_m$. **Полное приращение** $u = f(M)$ в A :

$$\Delta u = f(M) - f(A) = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, \dots, a_m)$$

Для непрерывности $u = f(M)$ в A необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δu являлось бесконечно малой в A функцией:

$$\lim_{M \rightarrow A} \Delta u = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - f(A)) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow a_m}} \Delta u = 0$$

Это разностная форма условия непрерывности $u = f(M)$ в A .

Зафиксируем все x_i , кроме k –го, x_k придадим $\forall$ приращение Δx_k , чтобы $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in$ области задания $f(M)$.

Частное приращение в $M(x_1, \dots, x_m)$, соответствующее Δx_k :

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется непрерывной в $M(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_k , если частное приращение $\Delta_{x_k} u$ этой Φ -и в точке M является бесконечно малой функцией от Δx_k :

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} u = 0$$

Из непрерывности $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в $M \Rightarrow$ ее непрерывность в M по $\forall$ переменной $x_1, \dots, x_m$. Наоборот нет.

1°. **У1.** Пусть $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в A . Тогда $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M) / g(M)$ непрерывны в A (частное при $g(A) \neq 0$).

Док-во. $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в $A \Rightarrow$ по О1 они имеют в A пределы $f(A)$ и $g(A) \Rightarrow$ предельные значения $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M) / g(M)$ существуют и равны соответственно $f(A) + g(A)$, $f(A) - g(A)$, $f(A) \cdot g(A)$, $f(A) / g(A) \Rightarrow$ по О1 они непрерывны в A .

2°. Пусть Φ -ции $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ (1)

заданы на мн-ве $\{N\}$ евклидова пр-ва E^k , $t_1, \dots, t_k$ — координаты точек в $E^k \Rightarrow \forall N(t_1, \dots, t_k)$ из $\{N\}$ ставится в соответствие с помощью (1) точка $M(x_1, \dots, x_m)$ евклидова пр-ва E^m . Пусть $\{M\}$ — мн-во всех этих точек, $u = f(x_1, \dots, x_m)$ — функция m переменных, заданная на $\{M\} \Rightarrow$ на мн-ве $\{N\}$ пр-ва E^k определена сложная функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m$ — функции определяются формулами (1).

У2. Пусть Φ -и $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ непрерывны в $A(a_1, \dots, a_k)$, а Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в $B(b_1, \dots, b_m)$, где $b_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_k)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда сложная Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m$ — определенные выше Φ -и аргументов $t_1, \dots, t_k$, непрерывна в $A(a_1, \dots, a_k)$.

Док-во. Пусть $\{N_n\}$, $N_n \neq A - \forall$ сходящаяся к A послед-сть точек из области $\{N\}$ задания функций $\varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, а $\{M_n\}$ — соответ-щая послед-сть точек: $x_i^{(n)} = \varphi_i(t_1^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})$. Φ -и φ_i непрерывны в $A \Rightarrow \{M_n\} \rightarrow B(b_1, \dots, b_m)$. Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в $B \Rightarrow \{f(M_n)\} \rightarrow f(B)$. Но $\{f(M_n)\}$ — это послед-сть значений сложной функции, отвечающая сходящейся к A последовательности $\{N_n\}$ точек области ее задания $\Rightarrow$ непрерывность сложной Φ -ции.

3°. **T1.** Если $u = f(M)$ непрерывна в $A \in E^m$ и $f(A) \neq 0$, то $\exists$ такая ε -окрестность точки A , в пределах которой во всех точках области своего задания $f(M)$ не обращается в 0 и имеет знак, совпадающий со знаком $f(A)$.

Док-во. $u = f(M)$ непрерывна в $A \Rightarrow$ по О1 $\exists \lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$, где $b = f(A) \neq 0$ и по О2 для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что для всех M из области задания ф-и : $\rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - f(A)| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(M) < b + \varepsilon$ при $\rho(M, A) < \delta$. Если взять $\varepsilon < |b|$, то $b - \varepsilon$, $b + \varepsilon$ и b будут одного знака $\Rightarrow$ всюду в ε -окрестности $f(M)$ сохраняет знак числа $b = f(A)$.

4°. **T2.** Пусть $u = f(M)$ непрерывна во всех точках связного мн-ва $\{M\}$ евклидова пр-ва E^m , причем $f(A)$ и $f(B)$ – значения этой функции в точках A и B этого мн-ва. Пусть $C - \forall$ число между $f(A)$ и $f(B)$. Тогда на $\forall$ непрерывной кривой L , соединяющей A и B и целиком расположенной в $\{M\}$, $\exists N : f(N) = C$.

Док-во. Пусть $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta$ – уравнения непрерывной кривой L , соединяющей A и $B \in \{M\}$ и целиком расположенной в $\{M\}$. На $[\alpha, \beta]$ определена сложная ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_i = \varphi_i(t), i = 1, \dots, m, \alpha \leq t \leq \beta$, ее значения на $[\alpha, \beta]$ совпадают со значениями $u = f(M)$ на кривой L . Эта сложная ф-я 1 переменной t по У2 непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и по теореме о прохождении непрерывной функции от 1 переменной через $\forall$ промежуточное значение в некоторой точке $\xi \in [\alpha, \beta]$ принимает значение $C \Rightarrow$ в $N \in L$ с координатами $\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_m(\xi) : f(N) = C$.

5°. **T3 (1-я Вейерштрасса).** Если $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$, то она ограничена на этом мн-ве.

Док-во. Пусть $u = f(M)$ не ограничена сверху на $\{M\}$. Выделим послед-сть $\{M_n\}$ точек мн-ва $\{M\} : f(M_n) > n$. По Т Больцано – Вейерштрасса из $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпослед-сть $\{M_{kn}\} \rightarrow M, M \in \{M\}$. Послед-сть $\{f(M_{kn})\}$ бесконечно большая. Но из непрерывности $f(M)$ в $M = > \{f(M_{kn})\}$ должна сходиться к $f(M)$. Противоречие.

6°. Т4 (2-я Вейерштрасса). Если $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$, то она достигает на этом множестве своих ТВГ и ТНГ.

Док-во. Пусть $f(M)$ на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$ не достигает своей ТВГ $N \Rightarrow$ для всех точек мн-ва $\{M\} : f(M) < N$ и функция $F(M) = 1/(N - f(M)) > 0$, не обращается в 0 и по У1 непрерывна на $\{M\} \Rightarrow$ по Т3 $F(M)$ ограничена на $\{M\}$, т.е. $\exists B$, что для всех $M \in \{M\} : F(M) = 1/(N - f(M)) \leq B \Rightarrow$

т.к. $N - f(M) > 0$, то $f(M) \leq N - 1/B$ для всех $M \in \{M\} \Rightarrow$ противоречит тому, что N – наименьшая из всех верхних граней.

7°. Функция $u = f(M)$ называется равномерно непрерывной на мн-ве $\{M\}$ евклидова пр-ва E^m , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall M' \text{ и } M'' \in \{M\} : \rho(M', M'') < \delta$, выполняется $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$.

Т5 (о равномерной непрерывности). Непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$ функция равномерно непрерывна на $\{M\}$.

Док-во. Пусть непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$ функция $u = f(M)$ не является равномерно непрерывной на $\{M\}$, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists M' \text{ и } M'' \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M', M'') < \delta$, но $|f(M'') - f(M')| \geq \varepsilon \Rightarrow$

для $\forall \delta_n = 1/n \exists M_n' \text{ и } M_n'' \in \{M\} : \rho(M_n', M_n'') < 1/n$, но $|f(M_n'') - f(M_n')| \geq \varepsilon$. Т.к. $\{M_n'\}$ – послед-сть точек замкнутого ограниченного мн-ва $\{M\}$, то по Т Больцано – Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторой A подпослед-сть $\{M_{kn}'\}$. Подпослед-сть $\{M_{kn}''\}$ послед-сти $\{M_n''\}$ также сходится к A . $f(M)$ непрерывна в $A \Rightarrow \{f(M_{kn}')\} \rightarrow f(A)$ и $\{f(M_{kn}'')\} \rightarrow f(A) \Rightarrow \{f(M_{kn}') - f(M_{kn}'')\}$ – бесконечно малая послед-сть, это противоречит $|f(M_n'') - f(M_n')| \geq \varepsilon \Rightarrow u = f(M)$ равномерно непрерывна на $\{M\}$.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

равномерно непрерывна на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = 0; \\ (x_1 + x_2) \cdot \sin \frac{1}{x_1} \cdot \sin \frac{1}{x_2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

равномерно непрерывна в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. (Докажите, что

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0.)$$

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = 0; \\ \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

не является равномерно непрерывной в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. (Докажите, что она разрывна в точке $(0,0)$.)

2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных.
Достаточные условия дифференцируемости.

1. Пусть действительная функция $y = f(x)$ одной действительной переменной определена в некоторой окрестности точки x_0 , включая эту фиксированную точку. Под приращением аргумента Δx понимают любое число, при котором $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f . Число $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции f в точке x_0 , отвечающим приращению аргумента Δx . Выражение $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, определённое при $\Delta x \neq 0$, называют разностным отношением.

Если точка x_0 фиксирована, то разностное отношение является функцией от Δx , определённой в некоторой окрестности точки $\Delta x = 0$, за исключением самой этой точки.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ разностного отношения (если этот предел существует):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если вместо окрестности точки $\Delta x = 0$ рассмотреть правую (левую) полуокрестность этой точки и, соответственно, правый (левый) предел разностного отношения, то получим определение правой (левой) производной в точке x_0 :

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Очевидно, что функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда, и только тогда, когда она имеет в этой точке обе односторонние производные, которые равны друг другу.

С геометрической точки зрения наличие производной у функции f в точке x_0 означает, что через точку с координатами $(x_0, f(x_0))$ можно провести прямую, касательную к графику функции f . Эта касательная единственна, а тангенс угла её наклона к положительному направлению оси Ox равен $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) \neq \infty$, то уравнение указанной касательной имеет вид $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

Определение дифференцируемости функции f . Функция f называется дифференцируемой в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки, а приращение Δy этой функции в точке x_0 , отвечающее приращению аргумента Δx , может быть представлено в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$, где A – не зависящее от Δx конечное число, а $\omega(\Delta x) = o(\Delta x)$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что у её приращения в этой точке существует главная при $\Delta x \rightarrow 0$ линейная относительно Δx часть $A \cdot \Delta x$, а дополнительный член $\omega(\Delta x)$ является при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx . Выражение $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом дифференцируемой функции в точке x_0 и обозначается через dy или через $df(x_0)$. Приращение аргумента Δx обозначают также через dx и называют дифференциалом независимой переменной; $\Delta x = dx$ – любое число.

Теорема. Функция f дифференцируема в точке x_0 в том, и только в том случае, если она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть в точке x_0 функция f дифференцируема, т.е. $\Delta y = A \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$, где A не

зависит от Δx , а $\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Предположив, что $\Delta x \neq 0$, разделим Δy на Δx и устремим Δx к нулю:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A.$$

Но это означает, что у функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная, равная числу A : $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть функция f имеет в точке x_0 конечную производную, т.е. существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Это означает, что функция

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$$
 является бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, т.е. $\omega(\Delta x) = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, и функция f дифференцируема в точке x_0 ; $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$. $\square$

Пусть дана дифференцируемая в точке x_0 функция $y = f(x)$, аргумент x которой является дифференцируемой функцией $x = \varphi(t)$ аргумента t . Тогда y является сложной функцией $y = f(\varphi(t))$ аргумента t , а x — промежуточным аргументом. В случае, когда аргумент x являлся независимой переменной, диф-

дифференциал функции f определялся формулой $dy = f'_x(x_0)dx$. Если же аргумент x зависит от t , то возникает вопрос о дифференцируемости y по t и о выражении dy через dt .

Теорема о дифференцируемости сложной функции. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в некоторой точке t_0 , а

функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 , причём её производная имеет вид $[f(\varphi(t))]'_t = f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0)$.

Доказательство. Придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx функции $x = \varphi(t)$, а приращению Δx — приращение Δy функции $y = f(x)$. Из условия дифференцируемости функции $y = f(x)$ имеем $\Delta y = f'_x(x_0) \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$, где $\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x \neq 0$. Введём соглашение: $\omega(\Delta x = 0) = 0$. Разделим на $\Delta t \neq 0$: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta t}$. Из условия дифференцируемости функции $x = \varphi(t)$ имеем $\Delta x = \varphi'_t(t_0) \cdot \Delta t + \chi(\Delta t)$, где

$$\frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0) + f'_x(x_0) \cdot \frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \\ &= f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0) + f'_x(x_0) \cdot \frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \left(\varphi'_i(t_0) + \frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} \right) \rightarrow f'_x(x_0) \cdot \varphi'_i(t_0) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

А это и доказывает наличие конечной производной у сложной функции. $\square$

Замечание. Может оказаться, что при некоторых $\Delta t \neq 0$ будет $\Delta x = 0$, и тогда в выражении для $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ член $\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta t}$ нельзя разделить и умножить на $\Delta x = 0$. Поэтому и вводилось естественное соглашение, что $\omega(\Delta x = 0) = 0$.

Пример. $y = f(x) = |x|$. Эта функция непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$. В самом деле: $f'(0-) = -1 \neq +1 = f'(0+)$. Во всех остальных точках функция дифференцируема.

Пример.

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{рациональное число;} \\ x^2, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема только в одной точке $x_0 = 0$. $f'(0) = 0$. Во всех остальных точках функция разрывна.

Пример. $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Эта функция не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$, хотя её график имеет в точке $x_0 = 0$ (вертикальную) касательную.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что f' непрерывна в любой точке $x \neq 0$, но при $x = 0$ не имеет ни правого, ни левого предельного значения. То есть, f' имеет при $x = 0$ разрыв 2-го рода.

$M(x_1, \dots, x_m)$ – внутренняя точка области задания $u = f(x_1, \dots, x_m)$.

Отношение частного приращения $\Delta_{x_k} u$ в фиксированной

$M(x_1, \dots, x_m)$ к соответствующему приращению Δx_k аргумента x_k

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_k} \quad (1)$$

является ф-цией от Δx_k , определенной для всех, $\neq 0$, значений Δx_k , для которых $M(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in$ области задания u .

О. Если $\exists$ предел отношения (1) частного приращения $\Delta_{x_k} u$ функции в $M(x_1, \dots, x_m)$ к соответствующему приращению Δx_k аргумента x_k при $\Delta x_k \rightarrow 0$, то этот предел называется **частной производной** функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ точке M по аргументу x_k :

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$$

Полное приращение $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в $M(x_1, \dots, x_m)$, соответствующее приращениям $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

О. Ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется **дифференцируемой** в $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в M можно представить:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (2)$$

где $A_1, \dots, A_m$ – некоторые не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ числа, а $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функции, равные 0 при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$.

(2) – условие дифференцируемости ф-и в M . Другая форма:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (3)$$

где ρ – бесконечно малая при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функция $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$, $\rho = 0$ при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$. Условия (2) и (3) эквивалентны, т.к. : 1) при $\rho \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_i}{\rho} \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| &\leq \\ &\leq \left\{ |\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \dots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \right\} \rho \leq \{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|\} \rho = o(\rho) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ сумма $\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с ρ , $o(\rho) = 0$ при $\rho = 0$. Т.о. (2) $\Rightarrow$ (3)

2) пусть не все $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ равны 0 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} o(\rho) &= \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}{\rho} = \\ &= \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_1}{\rho} \right] \Delta x_1 + \dots + \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_m}{\rho} \right] \Delta x_m. \text{ Пусть } \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_i}{\rho} \right] \Delta x_i = \alpha_i \end{aligned}$$

и учитывая, что α_i – бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$ (и при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$) функция, получим (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2)

Если хотя бы 1 из $A_1, \dots, A_m$ отлично от 0, то $A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m$ – главная, линейная относительно приращений аргументов часть приращения дифференцируемой функции.

Т1. Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в $M(x_1, \dots, x_m)$, то в этой точке $\exists$ частные производные по всем аргументам, причем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, где A_i определяются из условия (2) или (3) дифф-сти функции.

Док-во. Из (2) $\Rightarrow$ частное приращение функции в этой точке:

$$\Delta_{x_i} u = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i \Rightarrow \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } \alpha_i \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x_i \rightarrow 0, \text{ то } \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$$

Сл1. Условие (3) диффе-сти функции в M можно записать в форме (все частные производные берутся в M)

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho) \quad (4)$$

Сл2. Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в $M(x_1, \dots, x_m)$, то представление ее приращения Δu в форме (2) или (3) единственно. (т.к. коэффициенты A_i этих представлений = частным производным в данной $M \Rightarrow$ определяются единственным образом).

Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-а в $M(x_1, \dots, x_m)$, то она и непрерывна в M .

(т.к. из (2) $\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta u = 0 \Rightarrow$ функция непрерывна в M)

О. Дифференциалом du дифф-мой в $M(x_1, \dots, x_m)$ ф-и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в M . Если в представлении (1) все коэффициенты $A_i = 0$, то $du = 0$ в M .

$$du = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m \quad (2)$$

Дифференциал dx_i независимой переменной $x_i - \forall$ (не зависящее от $x_1, \dots, x_m$) число. Пусть $dx_i = \Delta x_i \Rightarrow$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

Т2 (достаточное условие дифф-сти). Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, причем все эти частные производные непрерывны в M_0 , то функция дифф-ма в M_0 .

Док-во. Для ф-и 2 переменных $u = f(x, y)$. Пусть f'_x и $f'_y \in$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывны в ней. Дадим x и y столь малые приращения Δx и Δy , чтобы $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in$ этой окрестности M_0 . Полное приращение

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

Выражение $[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$ – приращение ф-ции $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ переменной x на $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Т.к. $u = f(x, y)$ имеет частные производные, то $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ дифф-ма и ее производная по x – это f'_x . По Т Лагранжа, $\exists$ такое θ_1 из

$$0 < \theta_1 < 1: [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x$$

Ан-но, для некоторого θ_2 из $0 < \theta_2 < 1$:

$$[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

f'_x и f'_y непрерывны в $M_0 \Rightarrow$

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

где α и β – бесконечные малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

$\Rightarrow u = f(x, y)$ дифф-ма в M_0 .

Пример.

$$y = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 \neq 0; \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

В точке $(0,0)$ эта функция имеет равные нулю частные производные

$\frac{\partial y}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_2}$. Но в точке $(0,0)$ функция f разрывна: если точку

$\vec{x}$ устремить к началу координат вдоль прямой

$x_2 = c \cdot x_1, \quad c = const \neq 0, \quad$ то вдоль этой прямой

$f(x_1, x_2) = \frac{c}{1 + c^2}$ не стремится к $f(0,0) = 0$.

3. Определенный интеграл, его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

Пусть $f(x)$ задана на $[a, b]$, $a < b$, T – разбиение $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных сегментов $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Пусть $\xi_i - \forall$ точка $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина сегмента. $\Delta = \max \Delta x_i$

О1. Число $I\{x_i, \xi_i\}$, где

$$I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** $f(x)$, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

О2. Число I называется **пределом интегральных сумм** $I\{x_i, \xi_i\}$ при $\Delta \rightarrow 0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: для $\forall$ разбиения T сегмента $[a, b]$, для которого $\Delta = \max \Delta x_i < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I\{x_i, \xi_i\}$$

О3. Ф-я $f(x)$ называется **интегрируемой (по Риману)** на $[a, b]$, если $\exists$ конечный предел I интегральных сумм $f(x)$ при $\Delta \rightarrow 0$. Предел I – **определенный интеграл** от $f(x)$ по $[a, b]$: $I = \int_a^b f(x)dx$

Утв. Неограниченная на $[a, b]$ ф-я $f(x)$ не интегрируема на $[a, b]$.

Док-во. $f(x)$ не ограничена на $[a, b] \Rightarrow$ она не ограничена на некотором $[x_{k-1}, x_k] \forall$ данного разбиения $T[a, b] \Rightarrow$ слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ в $I\{x_i, \xi_i\}$ можно сделать как угодно большим по модулю за счет выбора $\xi_k \Rightarrow I\{x_i, \xi_i\}$ не ограничены $\Rightarrow \nexists$ конечного предела интегральных сумм. •

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, T – разбиение $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, M_i и m_i – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Суммы $S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ называются **верхней и нижней суммами** $f(x)$ для данного T сегмента $[a, b]$.

Для $\forall I\{x_i, \xi_i\}$ разбиения T сегмента $[a, b]$: $s \leq I\{x_i, \xi_i\} \leq S$.

Свойства верхних и нижних сумм.

1°. Для $\forall$ фиксированного разбиения T и для $\forall \varepsilon > 0$ точки ξ_i (ξ_i^*) на $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что:

$$0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon \quad (0 \leq I\{x_i, \xi_i^*\} - s < \varepsilon).$$

Пусть T – некоторое фиксированное разбиение $[a, b]$. По определению точной грани M_i для данного $\varepsilon > 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ $\exists \xi_i$: $0 \leq M_i - f(\xi_i) < \varepsilon / (b-a)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Умножая эти неравенства на Δx_i и складывая, получим $0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$.

2°. Если разбиение T' сегмента $[a, b]$ получено путем добавления новых точек к точкам T , то $s \leq s'$, $S' \leq S$.

Пусть к T добавляется одна точка $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, M'_i и M''_i – ТВГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$, $\Delta x'_i$ и $\Delta x''_i$ – длины сегментов $\Rightarrow \Delta x_i = \Delta x'_i + \Delta x''_i$. ТВГ на части $[x_{i-1}, x_i]$ не превосходит ТВГ M_i на всем сегменте $\Rightarrow M_i \geq M'_i$ и $M_i \geq M''_i \Rightarrow S - S' = M_i \Delta x_i - (M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i) = (M_i - M'_i) \Delta x'_i + (M_i - M''_i) \Delta x''_i \geq 0 \Rightarrow S' \leq S$. Для $s \leq s'$ аналогично.

3°. Пусть T' и T'' – $\forall$ разбиения $[a, b]$. Тогда: $s' \leq s''$, $s'' \leq S'$.

$s' \leq S'$, $s'' \leq S''$. Пусть T – разбиение $[a, b]$: $T = T' \cup T''$, а S и s – верхняя и нижняя суммы разбиения $T \Rightarrow$ по св-ву 2°:

$$s' \leq s \leq S \leq S', \quad s'' \leq s \leq S \leq S'' \Rightarrow s' \leq S'', \quad s'' \leq S'.$$

4°. Мн-во $\{S\}$ верхних сумм данной $f(x)$ для всевозможных разбиений $[a, b]$ ограничено снизу. Мн-во $\{s\}$ нижних сумм – сверху. $\Rightarrow$ из 3°. $\forall S \geq$ некоторой фиксированной $s \Rightarrow \{S\}$ ограничено снизу. $\forall s \leq$ какой-либо верхней суммы $\Rightarrow \{s\}$ ограничено сверху.

Пусть $\bar{I}$ – ТНГ мн-ва $\{S\}$ верхних сумм, $\underline{I}$ – ТВГ множества $\{s\}$ нижних сумм: $\bar{I} = \inf \{S\}$, $\underline{I} = \sup \{s\}$. Числа $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – **верхний и нижний интегралы Дарбу от $f(x)$** .

$\bar{I} \geq \underline{I}$. Пусть $\bar{I} \leq \underline{I} \Rightarrow \underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > 0$. Т.к. $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – точные грани $\Rightarrow \exists S'$ и s'' – верхняя и нижняя суммы некоторых разбиений T' и T'' сегмента $[a, b]$: $\bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} > S'$ и $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < s''$. Вычитая 2-е неравенство из 1-ого и учитывая $\underline{I} - \bar{I} = \varepsilon \Rightarrow s'' > S' \Rightarrow$ противоречит св-ву 3°.

5°. Пусть разбиение T' сегмента $[a, b]$ получено из разбиения T добавлением к последнему p новых точек, и пусть s', S' и s, S – нижние и верхние суммы разбиений T' и T . Тогда для разностей $S - S'$ и $s' - s$ (они ≥ 0 по св-ву 2°) можно получить оценку, зависящую от максимальной длины Δ частичных сегментов разбиения T , числа p добавленных точек и ТВГ и ТНГ M и m ф-ции $f(x)$ на $[a, b]$: $S - S' \leq (M - m)p\Delta$, $s' - s \leq (M - m)p\Delta$

Пусть к разбиению T добавляется точка $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, он разделится на $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$, $\Delta x'_i$ и $\Delta x''_i$ – длины сегментов $\Rightarrow \Delta x_i = \Delta x'_i + \Delta x''_i$.

Пусть M_i, M'_i и M''_i – ТВГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} S - S' &= M_i \Delta x_i - (M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i) \\ &= (M_i - M'_i) \Delta x'_i + (M_i - M''_i) \Delta x''_i \end{aligned}$$

Далее, $m \leq M'_i \leq M_i \leq M$ и $m \leq M''_i \leq M_i \leq M \Rightarrow M_i - M'_i \leq M - m$ и $M_i - M''_i \leq M - m \Rightarrow S - S' \leq$

$$\leq (M - m)(\Delta x'_i + \Delta x''_i) \leq (M - m)\Delta x_i \leq (M - m)\Delta$$

Это 1-е неравенство св-ва 5° при $p = 1$. Для нижних сумм аналогично.

6° Лемма Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ от $f(x)$ по $[a, b]$ являются с пределами верхних и нижних сумм при $\Delta \rightarrow 0$.

Докажем: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}$

1) $M = m$, т. е. $f(x) = \text{const} \Rightarrow$ лемма очевидна, т.к. $S = \bar{I} = \underline{I} = s$.

2) $M > m$. Т.к. $\bar{I}$ – ТНГ $\{S\} \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists T^*[a, b]$:

$$S^* - \bar{I} < \varepsilon/2. \quad (1)$$

Пусть p – число точек T^* , лежащих строго внутри $[a, b]$. Пусть $T = \forall$ разбиение $[a, b]$: $\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p} \quad (2)$ и S – верхняя сумма T .

Добавим к T внутренние точки $T^* \Rightarrow$ получим разбиение T' , верхняя сумма S' которого по св-ву 5° и условию (2):

$$0 \leq S - S' \leq (M - m)p\Delta < \varepsilon/2 \quad (3)$$

Но T' можно рассматривать как разбиение, полученное в результате добавления к T^* внутренних точек $T = \forall$ по св-ву 2°:

$$\bar{I} \leq S' \leq S^* \Rightarrow 0 \leq S' - \bar{I} \leq S^* - \bar{I} \Rightarrow \text{из (1): } 0 \leq S' - \bar{I} \leq \varepsilon/2$$

Складывая это неравенство с (3), получим $0 \leq S - \bar{I} \leq \varepsilon$. (4)

Т.о., для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (см (2)): верхние суммы S разбиений T сегмента $[a, b]$, для которых $\Delta < \delta$ (см. (2)), удовлетворяют неравенству (4) $\Rightarrow$ верхний интеграл Дарбу является пределом верхних сумм. Для нижних сумм док-во аналогично.

Т. Чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого $S - s \leq \varepsilon$.

1) **Необходимость.** Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, I – предел интегральных сумм $f(x) \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, что для $\forall$ разбиения T , где $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на частичных сегментах выполняется: $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon/4$. (1)

Зафиксируем одно такое разбиение T . По св-ву 1° (Для $\forall$ фиксированного T и для $\forall \varepsilon > 0$ точки ξ_i (ξ_i^*) на $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что $0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$ ($0 \leq I\{x_i, \xi_i^*\} - s < \varepsilon$) для данного T можно указать такие 2 интегральные суммы, что

$$S - I\{x_i, \xi_i'\} < \varepsilon/4, \quad I\{x_i, \xi_i''\} - s < \varepsilon/4 \quad (2)$$

Обе $I\{x_i, \xi_i'\}$ и $I\{x_i, \xi_i''\}$ удовлетворяют (1).

$S - s = (S - I\{x_i, \xi_i'\}) + (I\{x_i, \xi_i'\} - I) + (I - I\{x_i, \xi_i''\}) + (I\{x_i, \xi_i''\} - s) \Rightarrow$ учитывая (1) и (2): $S - s < \varepsilon$

2) **Достаточность.** Для $\forall T: s \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S$ и для $\forall \varepsilon > 0$, по условию теоремы, $\exists T: S - s \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \varepsilon \Rightarrow$ в силу произвольности ε :

$\bar{I} = \underline{I} = I$. Докажем, что число I является пределом интегральных сумм $f(x)$. По лемме Дарбу это число I – общий предел при $\Delta \rightarrow 0$ верхних и нижних сумм $\Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$: при $\Delta < \delta$: $I - s < \varepsilon/2$ и $S - I < \varepsilon/2$, т. е. при $\Delta < \delta$, $S - s < \varepsilon$, и $s \leq I \leq S$. Для $\forall I\{x_i, \xi_i\}$ данного T : $s \leq I\{x_i, \xi_i\} \leq S$.

Т. о., при $\Delta < \delta$ обе величины I и $I\{x_i, \xi_i\}$ заключены между числами s и S , разность между которыми меньше $\varepsilon \Rightarrow$ при $\Delta < \delta$:

$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon \Rightarrow$ число I есть предел интегральных сумм.

ТЗ. Непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Док-во. Пусть дано $\forall \varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ для $\varepsilon/(b-a) > 0 \exists \delta > 0$, что при разбиении T $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, длины которых $\Delta x_i < \delta$, колебание $f(x)$ на $\forall [x_{i-1}, x_i] \omega_i = M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$ (по следствию и Т1) $\Rightarrow$ для таких разбиений T

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по Т2 $f(x)$ интегрируема.

Т4. Если функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$ и если для $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва этой функции и имеющих общую сумму длин меньше ε , то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Док-во. Пусть дано $\forall \varepsilon > 0$. Покроем точки разрыва $f(x)$ конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше $\varepsilon / 2(M - m)$,

M и m – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[a, b]$. Точки сегмента, не принадлежащие указанным интервалам, образуют множество, состоящее из конечного числа непересекающихся сегментов. На каждом из них $f(x)$

непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна. Разобьем каждый такой сегмент так, чтобы колебание $f(x)$ на $\forall$ частичном сегменте разбиения $\omega_i < \varepsilon / 2(b - a)$. Объединяя эти разбиения и интервалы,

покрывающие точки разрыва функции $f(x)$, мы получим разбиение всего $[a, b]$. Для этого разбиения слагаемые суммы $S - s =$

$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$ разделяются на две группы: 1) все слагаемые, отвечающие частям разбиения T , образованным из интервалов, покрывающих точки разрыва, их колебания

$\omega_i = M_i - m_i \leq M - m \Rightarrow$

$$\sum_1 \omega_i \Delta x_i \leq (M - m) \sum_1 \Delta x_i < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

2) остальные слагаемые: $\omega_i < \varepsilon / 2(b - a) \Rightarrow$

$$\sum_2 \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \sum_2 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b - a)} (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_1 \omega_i \Delta x_i + \sum_2 \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по Т1 $f(x)$ интегрируема.

Сл. Ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте. В частности, кусочно непрерывная на данном сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Если p – число точек разрыва, то достаточно покрыть каждую точку разрыва интервалом длины $\varepsilon / 2p$

T5. Монотонная на $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.

Док-во. Если функция монотонна на $[a, b]$, то ее значения заключены между $f(a)$ и $f(b) \Rightarrow$ функция ограничена на этом сегменте. Докажем теорему для неубывающей на $[a, b]$ функции $f(x)$. Зададим $\forall \varepsilon > 0$ и разобьем $[a, b]$ на равные части, длины которых меньше $\varepsilon / (f(b) - f(a))$ и т.к. для неубывающей $f(x)$:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = f(b) - f(a) \Rightarrow$$

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n \omega_i = \varepsilon$$

интегралы формулы среднего значения

$$1^\circ. \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (1) \quad 2^\circ. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

3°. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$. Тогда $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $f(x) g(x)$ также интегрируемы на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (3)$$

Док-во. При $\forall$ разбиении $[a, b]$ и $\forall$ выборе точек ξ_i для:

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

$\Rightarrow$ т.к. $\exists$ предел правой части, то $\exists$ предел левой части $\Rightarrow$

$f(x) \pm g(x)$ интегрируема и верна (3).

$f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow$ они ограничены на $[a, b]$:

$|f(x)| \leq A$ и $|g(x)| \leq B$. Пусть $T - \forall$ заданное разбиение $[a, b]$, x' и $x'' -$

произвольные точки $[x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(x'') g(x'') - f(x') g(x') =$

$$= [f(x'') - f(x')] g(x'') + [g(x'') - g(x')] f(x')$$

Т. к. $|f(x'') g(x'') - f(x') g(x')| \leq \omega_i$, $|f(x'') - f(x')| \leq \omega_i^1$,

$|g(x'') - g(x')| \leq \omega_i^2$, где ω_i , ω_i^1 , $\omega_i^2 -$ колебания $f(x) g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ на

$[x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \omega_i \leq B \omega_i^1 + A \omega_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq B \sum_{i=1}^n \omega_i^1 \Delta x_i +$

$$A \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \Delta x_i$$

$f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение T :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^1 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$\Rightarrow$ для этого T : $S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < B \frac{\varepsilon}{2B} + A \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon \Rightarrow$

$f(x) g(x) -$ интегрируемая функция

4°. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $cf(x)$ ($c = \text{const}$) тоже:

$$\int_b^a cf(x)dx = c \int_b^a f(x)dx \quad (4)$$

Т.к. интегральные суммы $f(x)$ и $cf(x)$ отличаются на $\text{const } c$

5°. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $\forall [c, d] \in [a, b]$.

Док-во. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение $T[a, b]$, что $S - s \leq \varepsilon$. Добавим к точкам T точки c и d . В силу св-ва 2° верхних и нижних сумм (Если разбиение $T'[a, b]$ получено путем добавления новых точек к точкам T , то $s \leq s', S' \leq S$) для полученного разбиения T^* тем более справедливо неравенство $S - s < \varepsilon$. Разбиение T^* сегмента $[a, b]$ порождает разбиение T_I сегмента $[c, d]$. Если S_I и s_I – верхняя и нижняя суммы разбиения T_I , то $S_I - s_I \leq S - s$, т.к. каждое слагаемое $\omega_i \Delta x_i > 0$ в выражении $S_I - s_I = \sum \omega_i \Delta x_i$ будет также слагаемым в выражении для $S - s \Rightarrow S_I - s_I < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c, d]$.

6°. Пусть $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5)$$

1) $a < c < b$. $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b] \Rightarrow \exists$ такие разбиения этих сегментов, что $S - s < \varepsilon/2$ для каждого из них. Объединяя эти разбиения, мы получим разбиение $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Будем включать точку c в число делящих точек при $\forall$ разбиении $[a, b] \Rightarrow$ интегральная сумма для $f(x)$ на $[a, b]$ равна сумме интегральных сумм для этой функции на $[a, c]$ и $[c, b] \Rightarrow$ в пределе получим (5).

2) точка c лежит вне сегмента $[a, b] \Rightarrow$ сегмент $[a, b]$ есть часть сегмента $[a, c]$ или $[c, b] \Rightarrow$ по св-ву 5° $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $a < b < c$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$\Rightarrow$ по св-ву 2° получим (5). Для $c < a < b$ аналогично.

Оценки интегралов.

1°. Пусть интегрируемая на $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$\forall$ интегр. сумма $\geq 0 \Rightarrow$ предел интегр. сумм $I = \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

31 . Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq m$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a).$$

$f(x) - m \geq 0$ и интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b [f(x) - m] dx \geq 0 \Rightarrow$ по

св.3°: $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$

2°. Если $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и $\not\equiv 0$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq c > 0 \quad (6)$$

$f(x)$ неотрицательна и $\not\equiv 0 \Rightarrow$ на $[a, b] \exists \xi: f(\xi) = 2k > 0 \Rightarrow$ по теореме об устойчивости знака непрерывной функции $\exists [p, q]$, $\xi \in [p, q]$ и в пределах $[p, q] f(x) \geq k > 0 \Rightarrow$ по 31:

$\int_p^q f(x) dx \geq k(q-p) > 0$. По св-ву 6°

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^q f(x) dx + \int_q^b f(x) dx$$

$\Rightarrow$ т.к. $f(x) \geq 0$ и $\int_p^q f(x) dx \geq c > 0$, где $c = k(q-p)$ получаем (6)

3°. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (7)$$

Функция $f(x) - g(x) \geq 0$ и интегрируема на $[a, b] \Rightarrow (7)$ по св-ву 1° 32.

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (8)$$

Пусть M_i и m_i – точные грани $f(x)$, M_i' и m_i' – точные грани $|f(x)|$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Легко убедиться, что $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$ (рассмотреть случаи:

1) $M_i, m_i \geq 0$, 2) $M_i, m_i \leq 0$, 3) $M_i > 0, m_i \leq 0$) $\Rightarrow S_I - s_I \leq S - s \Rightarrow$ если для некоторого разбиения

$S - s < \varepsilon$, то для него $S_I - s_I < \varepsilon \Rightarrow |f(x)|$ интегрируема.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow$$

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow (8)$$

4°. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$. Тогда, если M и m – точные грани $f(x)$ на $[a, b]$, то:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (9)$$

$\Rightarrow$ из того, что для $\forall x \in [a, b]: m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$ и оценки 3° и св-ва 4°.

1-я формула среднего значения в обобщенной форме (13). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и m и M – точные грани $f(x)$ на $[a, b]$. Пусть $g(x) \geq 0$ (или $g(x) \leq 0$) на всем $[a, b]$. Тогда $\exists \mu$, где $m \leq \mu \leq M$, что $\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$ (12)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ (13)

Если $\int_a^b g(x) dx = 0 \Rightarrow$ в силу (9), $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0 \Rightarrow$ в качестве μ можно взять $\forall$ число. Если $\int_a^b g(x) dx > 0 \Rightarrow$ разделив все части неравенств (9) на $\int_a^b g(x) dx$, получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M, \text{ пусть } \mu = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

$\Rightarrow$ получим (12).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для $\forall \mu$, где $m \leq \mu \leq M$, $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \mu \Rightarrow$ (12) переходит в (13).

2-я формула среднего значения (формула Бонне). Если на $[a, b]$ функция $g(x)$ монотонна, а $f(x)$ интегрируема, то $\exists \xi \in [a, b]:$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

Пусть $f(x)$ интегрируема на $\forall$ сегменте, содержащемся в (a, b) и c – некоторая фиксированная точка (a, b) . Тогда для $\forall x \in (a, b)$ $f(x)$ интегрируема на $[c, x] \Rightarrow$ на (a, b) определена функция

$F(x) = \int_c^x f(t) dt$ – **интеграл с переменным верх. пределом.**

Т1. Любая непрерывная на интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет на этом интервале первообразную. Одной из первообразных является функция $F(x) = \int_c^x f(t) dt$, где $c - \forall$ фиксированная точка из (a, b) .

Док-во. Достаточно доказать, что для $\forall$ фиксированного $x \in (a, b)$ $\exists$ предельное значение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

По св-ву 6° определенных интегралов:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_c^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \\ &= (\text{по 1-й формуле среднего значения}) \\ &= f(\xi)\Delta x \end{aligned}$$

где ξ – число между числами x и $x + \Delta x$. $f(x)$ непрерывна в точке x
 $\Rightarrow$ при $\Delta x \rightarrow 0$ $f(\xi) \rightarrow f(x) \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\lim \\ \Delta x \rightarrow 0}} f(\xi) = f(x)$$

31. Аналогично доказывается теорема о существовании первообразной у непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции, а в качестве нижнего предела интегрирования c можно взять a .

32. При док-ве Т1 установлено существование производной от интеграла с переменным верхним пределом и доказано, что эта производная равна подынтегральной функции

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^x f(t) dt \right) = f(x)$$

33. Если $f(x)$ интегрируема на $\forall$ сегменте, содержащемся в (a, b) , то интеграл с переменным верхним пределом является непрерывной на (a, b) функцией от верхнего предела. Докажем, что приращение $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$ функции $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. В силу $\int_a^b f(x) dx \geq \mu(b - a)$:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x,$$

где число μ лежит между ТВГ и ТНГ гранями $f(x)$ на $[x, x + \Delta x] \Rightarrow \Delta F \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Основная формула интегрального исчисления. Любые 2 первообразные данной $f(x)$ отличаются на постоянную $\Rightarrow$ согласн Т1 и 31, можно утверждать, что $\forall$ первообразная $\Phi(x)$ непрерывно на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет вид:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

где C — некоторая постоянная.

Полагая в этой формуле сначала $x = a$, а затем $x = b$ и используя св-во 1° определенных интегралов:

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= C, & \Phi(b) &= \int_a^b f(t) dt + C \Rightarrow \\ \int_a^b f(t) dt &= \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b \quad (1) \end{aligned}$$

это **основная формула интегрального исчисления** (формула Ньютона — Лейбница).

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

На любом сегменте $[a, b]$ эта функция ограничена, но не интегрируема по Риману. В самом деле, если для некоторого разбиения $\{x_k\}$ все $\{\xi_k\}$ выбрать рациональными, то $\sigma(x_k, \xi_k) = b - a$. А если для того же разбиения $\{x_k\}$ все точки $\{\xi_k\}$ выбрать ирра-

циональными, то $\sigma(x_k, \xi_k) = 0$. Поэтому для указанной функции не существует предела интегральных сумм.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число;} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \\ & \text{где } m \text{ и } n - \text{взаимно простые целые числа,} \\ & n > 0. \end{cases}$$

Эта функция нигде не монотонна, непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках. Она интегри-

руема по Риману на любом сегменте $[a, b]$, и $\int_a^b f(x) dx = 0$. Ин-

тегрируемость данной функции можно доказать с помощью критерия интегрируемости ограниченной на сегменте функции, а равенст-

во интеграла нулю следует из того, что $\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} s = 0$.

4. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.

1. **Сходящиеся и расходящиеся ряды.** Рассмотрим произвольную числовую последовательность $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ и формально образуем из ее элементов бесконечную сумму вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (1.1)$$

Формально составленную сумму (1.1) принято называть числовым рядом или просто рядом. При этом отдельные слагаемые u_k принято называть членами ряда (1.1). Сумму первых n членов ряда (1.1) принято называть n -й частичной суммой ряда и обозначать символом S_n .

Итак, по определению

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k. \quad (1.2)$$

Определение. Ряд (1.1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм (1.2) этого ряда. При этом предел S указанной последовательности $\{S_n\}$ называется *суммой* ряда (1.1).

Таким образом, для сходящегося ряда (1.1), имеющего сумму S , мы можем формально записать равенство

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случае, если для данного ряда (1.1) предела последовательности частичных сумм (1.2) не существует, этот ряд называется *расходящимся*.

Замечание 1. С формальной точки зрения изучение числовых рядов представляет собой новую форму изучения числовых последовательностей, ибо 1) каждому ряду (1.1) однозначно соответствует последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм, 2) произвольной числовой последовательности $\{S_n\}$ однозначно соответствует числовой ряд (1.1) с членами $u_1 = S_1$, $u_k = S_k - S_{k-1}$ при $k > 1$, для которого эта последовательность служит последовательностью частичных сумм.

I. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

II. Если c — отличная от нуля постоянная, $u'_k = cu_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Для обоснования первого из этих свойств достаточно заметить, что в результате указанного отбрасывания (или добавления) конечного числа членов все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, изменятся на одну и ту же постоянную величину.

Для доказательства второго из указанных свойств обозначим n -е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ соответственно через S'_n и S_n и учтем, что $S'_n = cS_n$, где $c \neq 0$. Из последнего равенства вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Теорема 1.1 (критерий Коши для ряда). Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходилсся, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, и для всех натуральных чисел p ($p=1, 2, \dots$)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что величина, стоящая под знаком модуля в неравенстве (1.12), равна разности частичных сумм $S_{n+p} - S_n$.

Следствие 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то последовательность $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ является бесконечно малой.

Принято называть величину r_n n -м остатком ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Чтобы доказать следствие 1, достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $|r_n| \leq \varepsilon$ при $n \geq N$. Последнее неравенство непосредственно вытекает из неравенства (1.12), справедливого для любого $p = 1, 2, 3, \dots$, и из теоремы 3.13 ч. 1.

Следствие 2 (необходимое условие сходимости ряда). Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы последовательность $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ членов этого ряда являлась бесконечно малой.

Достаточно доказать, что для данного сходящегося ряда и любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_0 такой, что при $n \geq N_0$ $|u_n| < \varepsilon$. Пусть дано любое $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 1.1 найдется номер N такой, что при $n \geq N$ и для любого натурального p выполняется неравенство (1.12). В частности, при $p = 1$ это неравенство имеет вид

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{при } n \geq N). \quad (1.12')$$

Если теперь положить номер N_0 равным $N + 1$, то при $n \geq N_0$ в силу неравенства (1.12') получим $|u_n| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Иначе следствие 2 можно сформулировать так: для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$. Таким образом, при

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ называется гармоническим. Хотя

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, гармонический ряд в силу критерия Коши расходится. В

самом деле, если выбрать $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и $p = n$, то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \text{ для сколь угодно большого } n.$$

Теорема 1.2. Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходилсЯ, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.

Необходимость следует из того, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной (в силу теоремы 3.8 ч. 1).

Достаточность вытекает из того, что последовательность частичных сумм не убывает и, следовательно, для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была ограничена (в силу теоремы 3.15 ч. 1).

Теорема 1.3. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ — два ряда с неотрицательными членами. Пусть, далее, для всех номеров k справедливо неравенство

$$p_k \leq p'_k. \quad (1.14)$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказательство. Обозначим n -е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ соответственно через S_n и S'_n . Из неравенства (1.14) заключаем, что $S_n \leq S'_n$. Последнее неравенство означает, что ограниченность последовательности частичных сумм $\{S'_n\}$ влечет за собой ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ и, наоборот, неограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ влечет за собой неограниченность последовательности частичных сумм $\{S'_n\}$. В силу теоремы 1.2 теорема 1.3 доказана.

Следствие из теоремы 1.3. Если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ — ряд с неотрицательными членами, $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ — ряд со строго положительными членами и если существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,$$

то сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказательство. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L$, то по определению предела для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon.$$

Следовательно, при $k \geq N$ справедливо неравенство $p_k < (L + \varepsilon)p'_k$. Последнее неравенство совпадает с неравенством (1.15) при $c = L + \varepsilon$. В силу замечания 2 к теореме 1.3 следствие доказано.

Теорема 1.4. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ — два ряда со строго положительными членами. Пусть далее для всех номеров k справедливо неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}. \quad (1.16)$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказательство. Запишем неравенство (1.16) для $k=1, 2, \dots, n-1$, где n — любой номер:

$$\begin{aligned}\frac{p_2}{p_1} &\leq \frac{p'_2}{p'_1}, \\ \frac{p_3}{p_2} &\leq \frac{p'_3}{p'_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} &\leq \frac{p'_n}{p'_{n-1}}.\end{aligned}$$

Перемножая почленно все написанные неравенства, получим

$$\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p'_n}{p'_1}, \text{ или } p_n \leq \frac{p_1}{p'_1} p'_n.$$

Поскольку в последнем, неравенстве величина $c = p_1/p'_1$ представляет собой положительную постоянную, не зависящую от номера n , то в силу замечания 2 к теореме 1.3 теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5 (признак Даламбера) ⁴⁾. I. Если для всех номеров k , по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right)^{5)}, \quad (1.20)$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

II. Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \quad (1.21)$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Теорему II обычно называют признаком Даламбера в предельной форме. В этой форме он наиболее часто используется.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II.

1) Для доказательства теоремы I положим $p_k' = q^k$ ($p_k' = 1$). Тогда $\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = q$, где $q < 1$ ($\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = 1$), и мы можем переписать равенство (1.20) в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p_{k+1}'}{p_k'} \right). \quad (1.22)$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ совпадающий с рядом (1.18) ((1.19)), сходится (расходится), то неравенство (1.22) на основании теоремы сравнения 1.4 гарантирует сходимость (расходимость) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема I доказана.

2) Докажем теперь теорему II. Если $L < 1$, то найдется положительное число ε такое, что $L = 1 - 2\varepsilon$, т. е. $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. По определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \quad (1.23)$$

Число $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ играет роль q в теореме I. Ряд сходится.

Если же $L > 1$, то найдется положительное число ε такое, что $L = 1 + \varepsilon$ и $L - \varepsilon = 1$. В этом случае на основании левого из неравенств (1.23) получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \quad (\text{при } k \geq N).$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится на основании теоремы I. Теорема 1.5 полностью доказана.

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \quad (\text{при } k \geq N).$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится на основании теоремы I. Теорема 1.5 полностью доказана.

Теорема (интегральный признак). Пусть при $x \geq 1$ функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Пусть k – любой номер, $k > 1$. Из монотонности функции f при любом x , $k-1 \leq x \leq k$, имеем неравенство $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$. На сегменте $[k-1, k]$ функция f ограничена и монотонна, поэтому она интегрируема на этом сегменте. Имеем неравенства

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx = f(k-1) \quad \text{при}$$

всех $k > 1$. Сложим все такие неравенства для $k = 2, 3, \dots, n$:

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \quad \text{Числовая последовательность}$$

$$a_n = \int_1^n f(x) dx \quad \text{является неубывающей в силу неотрицательности}$$

f . Для сходимости при $n \rightarrow +\infty$ последовательности $\{a_n\}$ необходима и достаточна её ограниченность. А для сходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ с неотрицательными членами необходима и достаточна ограниченность его частичных сумм. Поэтому полученное неравенство означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновре-

менно с последовательностью $\{a_n\}$. Но для монотонной неотрицательной функции f сходимость или расходимость последовательности $\{a_n\}$ означает, соответственно, сходимость или расходимость интеграла $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. $\square$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. При $\alpha > 1$ этот ряд сходится, так как сходится $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. А при $\alpha \leq 1$ ряд расходится, так как расходится указанный интеграл.

3. Если члены сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ являются числами произвольных знаков, то имеются следующие две возможности.

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Определение. Сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится.

Из критерия Коши следует, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$

вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. В самом деле:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|.$$

Теорема (признак Лейбница). Пусть последовательность $\{u_k\}$ является невозрастающей и бесконечно малой. Тогда знако-

редующейся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k$ сходится.

Доказательство.

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$. Поэтому в силу невозрастания последовательности $\{u_k\}$ последовательность $\{S_{2n}\}$ не убывает. С другой стороны, $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$. Поэтому в силу невозрастания последовательности $\{u_k\}$ и того, что $u_{2n} \geq 0$, последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху числом u_1 . Следовательно, $\{S_{2n}\}$ сходится к некоторому числу S . Но из того, что $S_{2n-1} = S_{2n} - u_{2n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 0$, вытекает сходимость последовательности $\{S_{2n-1}\}$ к тому же S . $\square$

Замечание. $\{S_{2n}\}$ сходится к S не убывая, а $\{S_{2n-1}\}$ сходится к S не возрастаая. $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$, причём для любого номера n $|S_n - S| \leq u_n$.

**5.Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.
Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.**

1. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НА МНОЖЕСТВЕ

1. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда. Предположим, что на числовой прямой E^1 или в m -мерном евклидовом пространстве E^m задано некоторое множество $\{x\}^{(1)}$.

Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, \dots, n, \dots$ ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ мы и будем называть функциональной последовательностью.

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть членами или элементами рассматриваемой последовательности, а множество $\{x\}$, на котором определены все функции $f_n(x)$, будем называть областью определения этой последовательности.

Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, область определения которой является некоторое множество $\{x\}$. Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2.1)$$

бесконечного числа членов указанной функциональной последовательности будем называть функциональным рядом.

При этом отдельные функции $u_n(x)$ мы будем называть членами рассматриваемого ряда, а множество $\{x\}$, на котором определены эти функции, будем называть областью определения этого ряда.

Как и в случае числового ряда, сумму первых n членов функционального ряда (2.1) будем называть n -й частичной суммой этого ряда.

Отметим, что изучение функциональных рядов совершенно эквивалентно изучению функциональных последовательностей, ибо каждому функциональному ряду (2.1) однозначно соответствует функциональная последовательность

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (2.2)$$

его частичных сумм и, наоборот, каждой функциональной последовательности (2.2) однозначно соответствует функциональный ряд (2.1) с членами $u_1(x) = S_1(x)$, $u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ при $n \geq 2$.

нального ряда) в точке и на множестве. Предположим, что областью определения функциональной последовательности (функционального ряда) является множество $\{x\}$ пространства E^m . Фиксируем произвольную точку $x_0 = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$ множества $\{x\}$ и рассмотрим все члены функциональной последовательности (функционального ряда) в этой точке x_0 . При этом получим числовую последовательность (числовой ряд).

Если указанная числовая последовательность (числовой ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (функциональный ряд) сходится в точке x_0 .

Множество всех точек x_0 , в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется областью сходимости этой последовательности (ряда).

Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех точек x множества $\{x\}$, порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, определенной на множестве $\{x\}$. Эту функцию называют предельной функцией функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.

Аналогично, если функциональный ряд (2.1) имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$, то на этом множестве

определена функция $S(x)$, являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда и называемая его суммой.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $x \in R$. Этот функциональный ряд схо-

дится в каждой точке x множества $-1 \leq x < 1$. При $x = -1$ он сходится условно, а при $-1 < x < 1$ — абсолютно. В точке $x = 1$ он превращается в расходящийся гармонический ряд. При любом x , $|x| > 1$, ряд расходится, поскольку его общий член при таких x не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

3. Равномерная сходимость на множестве. Предположим, что функциональная последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2.5)$$

сходится на множестве $\{x\}$ пространства E^m к предельной функции $f(x)$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность (2.5) сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве

$\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Замечание 1. В этом определении весьма существенно то, что номер N зависит только от ε и не зависит от точек x , т. е. утверждается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (2.6) справедливо сразу для всех точек x множества $\{x\}$.

Определение 2. Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Теорема. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X в том, и только в том случае, если $\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство следует непосредственно из определения равномерной сходимости. $\square$

4. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности (ряда). Справедливы следующие фундаментальные теоремы.

Теорема 2.1. Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость неравенства

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (2.7)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p ($p=1, 2, \dots$) и всех точек x из множества $\{x\}$.

Теорема 2.2. Для того чтобы функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.8)$$

равномерно на множестве $\{x\}$ сходил к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (2.9)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p ($p=1, 2, \dots$) и всех точек x множества $\{x\}$.

Достаточно провести доказательство только теоремы 2.1, так как теорема 2.2 является следствием теоремы 2.1 (заметим, что в левой части (2.9) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм с номерами $n+p$ и n функционального ряда (2.8)).

Доказательство теоремы 2.1. Необходимость. Предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$. Тогда, фиксируя произвольное $\varepsilon > 0$, мы найдем для него номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.10)$$

будет справедливо для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$.

Если p — любое натуральное число, то при $n \geq N(\varepsilon)$ номер $n+p$ тем более будет удовлетворять условию $n+p \geq N(\varepsilon)$, а поэтому для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ тем более будет справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.11)$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу (2.10) и (2.11) получим, что

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\equiv |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leq \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

(для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$). Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство (2.7) справедливо для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$.

Из неравенства (2.7) и из критерия Коши сходимости числовой последовательности (см. п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1) вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке x множества $\{x\}$ и существование определенной в каждой точке x множества $\{x\}$ предельной функции $f(x)$.

Фиксируем произвольный номер n , удовлетворяющий условию $n \geq N(\varepsilon)$, и произвольную точку x множества $\{x\}$, перейдем в неравенстве (2.7) к пределу при $p \rightarrow \infty$. Используя теорему 3.13 п. 4 § 1 гл. 3 ч. 1, мы получим, что для произвольного номера n , удовлетворяющего условию $n \geq N(\varepsilon)$, и произвольной точки x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Это и доказывает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$. Достаточность доказана.

Теорема 2.3 (признак Вейерштрасса). Если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.12)$$

определен на множестве $\{x\}$ пространства E^m и если существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (2.13)$$

такой, что для всех точек x множества $\{x\}$ и для всех номеров k справедливо неравенство

$$|u_k(x)| \leq c_k, \quad (2.14)$$

то функциональный ряд (2.12) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как числовой ряд (2.13) сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда (см. теорему 1.1 из гл. 1) найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad (2.15)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и всех натуральных p .

Из неравенств (2.14) и (2.15) и из того, что модуль суммы p слагаемых не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

(для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$).

В силу критерия Коши равномерной сходимости (см. теорему 2.2) ряд (2.12) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Признак Вейерштрасса кратко может быть сформулирован так: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1})$, $x \in R$. Областью сходимости

этого ряда является множество $-1 < x \leq 1$. В самом деле, частичные суммы ряда $S_n(x) = x^n - 1$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к функции

$$S(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 < x < 1; \\ 0 & \text{при } x = 1 \end{cases} \quad \text{на указанном множестве.}$$

$\sup_{-1 < x \leq 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$, поэтому на $-1 < x \leq 1$ ряд сходится не-

равномерно. Но для любого числа δ , $0 < \delta < 1$, на множестве $-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta$ ряд сходится равномерно, так как

$$\sup_{-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta} |S_n(x) - S(x)| = (1 - \delta)^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $-1 \leq x < 1$. $\sup_{-1 \leq x < 1} \left| \frac{x^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$. Хотя по-

следовательность функций $\left\{ \frac{x^k}{k} \right\}$ равномерно стремится к нулю

на множестве $-1 \leq x < 1$, функциональный ряд на этом множестве сходится неравномерно.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. По признаку Ди-

рихле на данном множестве ряд сходится равномерно. Однако

$\sup_{\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} \left| \frac{\sin kx}{k} \right| = \frac{1}{k}$, поэтому указанный функциональный ряд нельзя

мажорировать сходящимся числовым рядом. Признак Вейерштрасса является только достаточным условием равномерной сходимости, но не является необходимым условием.

Теорема 2.7. Если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.31)$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}_0$ к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке x предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = b_k,$$

то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке x_0 предел, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad (2.32)$$

т. е. символ $\lim$ предела и символ Σ суммирования можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу можно переходить почленно).

Доказательство. Сначала докажем сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (2.31), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (2.33)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$. Считая в неравенстве (2.33) фиксированными номера n и p и переходя в этом неравенстве к пределу при $x \rightarrow x_0$ (такой предельный переход можно осуществить по любой последовательности точек множества $\{x\}$, сходящейся к точке x_0), получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

(для каждого $n \geq N(\varepsilon)$ и каждого натурального p). В силу критерия Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Оценим теперь разность

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

для всех точек x множества $\{x\}$ из достаточно малой окрестности точки x_0 . Так как

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

из которого получаем неравенство

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right|, \quad (2.34)$$

справедливое для всех точек x множества $\{x\}$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех точек x множества $\{x\}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.35)$$

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ и выбранного номера n можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.36)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, x_0) < \delta$. Из (2.34) — (2.36) следует, что для всех таких x

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon.$$

Это доказывает существование предела $S(x)$ в точке x_0 , а следовательно, и справедливость равенства (2.32). Теорема доказана.

Следствие 1 из теоремы 2.7. Если в условиях теоремы 2.7 дополнительно потребовать, чтобы точка x_0 принадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда (2.31) были непрерывны в точке x_0 , то и сумма $S(x)$ этого ряда будет непрерывна в точке x_0 .

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{(1+|x|)^k}$ сходится на всей действительной

прямой $-\infty < x < +\infty$: если $x = 0$, то все члены ряда равны нулю; если $x \neq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^k} = \frac{1}{|x|}$, т.е. исходный ряд сходится к 1. Ни на одном отрезке, содержащем точку $x = 0$, исходный ряд не сходится равномерно, поскольку все его члены непрерывны, а сумма разрывна.

6. Криволинейный интеграл, формула Грина.

1. Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на множестве $\alpha \leq t \leq \beta$. Множество всех точек на плоскости Oxy , координаты которых заданы указанными равенствами, называется простой плоской кривой, если различным значениям параметра t отвечают различные точки этого множества. При этом говорят, что кривая задана параметрически указанными равенствами. Для одной и той же кривой можно указать разные способы её параметризации. Две простые кривые, у которых совпадают только граничные точки, образуют простую замкнутую кривую.

Пусть функции одной действительной переменной $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на множестве T . Если множество T можно разбить на сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ без внутренних точек их пересечения, на каждом из которых параметрические уравнения задают простую кривую, то говорят, что на плоскости Oxy задана параметрическая кривая. Теперь кривая может иметь точки самопересечения и участки самоналегания. Однако, точки кривой с одинаковыми координатами x и y , отвечающие различным значениям параметра t , считаются разными точками кривой. Параметрически заданная кривая является объединением простых кривых, которые пробегаются точкой на плоскости, когда параметр t монотонно пробегает множество T . Аналогично вводится понятие пространственной кривой.

Рассмотрим случай, когда параметр t задан на сегменте $[\alpha, \beta]$. Пусть $\{t_k\}$ – произвольное разбиение этого сегмента: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Каждой точке t_k отвечает некоторая точка M_k на кривой. Соединим отрезками прямых каждую пару точек M_{k-1} и M_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда получим вписанную в кривую ломаную линию, длина которой равна

$$l(\{t_k\}) = \sum_{k=1}^n \left((\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если множество длин вписанных в кривую ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям $\{t_k\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено, то кривая называется спрямляемой, а точная верхняя грань множества длин ломаных называется длиной дуги кривой. Длина дуги спрямляемой кривой не зависит от способа её параметризации.

Теорема. Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ задают параметрическую кривую на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$. Если они имеют на этом сегменте непрерывные производные, то кривая спрямляема, и длина её дуги равна

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

2. Предположим, что плоская параметрическая кривая L без точек самопересечения и участков самоналегания спрямляема, не замкнута и ограничена точками A и B :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta; \quad A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), \\ B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta)).$$

Пусть на кривой L определены три непрерывные вдоль этой кривой функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Рассмотрим разбиение $\{t_k\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$:

$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Каждой точке t_k на кривой L

отвечает некоторая точка $M_k = M_k(x_k, y_k)$, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. На каждом частичном сегменте разбиения $[t_{k-1}, t_k]$

выберем произвольную точку τ_k , которой на кривой L отвечает точка $N_k = N_k(\xi_k, \eta_k)$, $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$. Составим интегральные суммы: $\sigma_f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k$, где Δl_k – длина

дуги кривой (M_{k-1}, M_k) ; $\sigma_P = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$;

$$\sigma_Q = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}).$$

Рассмотрим всевозможные разбиения $\{t_k\}$ и отвечающие им интегральные суммы σ_f , σ_P , σ_Q .

Определение. Если при $\max_k \Delta l_k \rightarrow 0$ существует конечный предел I_f интегральных сумм σ_f вне зависимости от выбора разбиений $\{t_k\}$ и точек τ_k , то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L :
$$I_f = \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl.$$

Определение 3. Если существует предел интегральной суммы σ_2 [соответственно σ_3] при $\Delta \rightarrow 0$, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривой $L=AB$ и обозначается символом

$$\int_{AB} P(x, y) dx \quad \left[\text{соответственно} \quad \int_{AB} Q(x, y) dy \right]. \quad (4.4^2)$$

Сумму

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

принято называть общим криволинейным интегралом второго рода и обозначать символом

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (4.4^3)$$

Из определения криволинейных интегралов следует, что:

1) криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегает кривая

L , а для криволинейного интеграла второго рода изменение направления на кривой ведет к изменению знака, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

2) физически криволинейный интеграл первого рода (4.4¹) представляет собой массу кривой L , линейная плотность вдоль которой равна $f(x, y)$; общий криволинейный интеграл второго рода (4.4³) физически представляет собой работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы, имеющей составляющие $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Совершенно аналогично определяются интегралы первого и второго рода вдоль пространственной кривой:

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl,$$

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

3. Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, параметрически задающие кривую L , имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные, то L называется гладкой кривой. Особыми точками гладкой кривой называются точки, отвечающие тому значению параметра t , для которого $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$.

Теорема. Если L – гладкая кривая без особых точек, а функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вдоль L , то существуют криволинейные интегралы первого и второго рода $\int_{AB} f(x, y)dl$ и $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, а их вычисление может быть сведено к вычислению определённых интегралов Римана на сегменте $[\alpha, \beta]$:

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \left(\left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot dt,$$

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot dt.$$

Доказательство. В предположениях теоремы интегралы по $[\alpha, \beta]$ в правых частях трёх формул существуют, так как подынтегральные выражения в них непрерывны по переменной t . Рассмотрим разбиение $\{t_k\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$ и составим интегральные суммы

$$\sigma_f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta t_k, \quad \sigma_P = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

$$\sigma_Q = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k, \text{ где}$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt,$$

$$\Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi'(t) dt. \text{ Тогда}$$

$$\sigma_f = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt,$$

$$\sigma_Q = \sum_{k=1}^n Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi'(t) dt.$$

Пусть
$$I_f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$I_P = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt, \quad I_Q = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt.$$

Очевидно, что для разбиения $\{t_k\}$

$$I_f = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$I_P = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \quad ,$$

$$I_Q = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} Q(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \quad . \text{ Тогда}$$

$$\sigma_f - I_f =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$\sigma_P - I_P = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt \quad ,$$

$$\sigma_Q - I_Q = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - Q(\varphi(t), \psi(t))] \psi'(t) dt \quad .$$

Докажем, что при $\max_k \Delta t_k \rightarrow 0$ стремится к нулю и $\max_k (t_k - t_{k-1})$. Действительно, так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и не обращаются в нуль одновременно, то

$$m = \min_{\alpha \leq t \leq \beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} > 0$$

и

$$\Delta I_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Поэтому $t_k - t_{k-1} \leq \frac{\Delta l_k}{m}$. Следовательно, для любого числа

$\gamma > 0$ найдётся такое число $\delta(\gamma) > 0$, что из неравенства $\max_k \Delta l_k < \delta(\gamma)$ следует неравенство $\max_k (t_k - t_{k-1}) < \gamma$. Из

непрерывности по t сложных функций $f(\varphi(t), \psi(t))$, $P(\varphi(t), \psi(t))$ и $Q(\varphi(t), \psi(t))$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\gamma(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\max_k (t_k - t_{k-1}) < \gamma(\varepsilon)$ будут следовать неравенства

$$|f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{l}, \quad \text{где } l - \text{длина}$$

кривой L ,

$$|P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{M_1(\beta - \alpha)},$$

где $M_1 = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi'(t)|$,

$$|Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - Q(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{M_2(\beta - \alpha)},$$

где $M_2 = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\psi'(t)|$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\gamma(\varepsilon)) > 0$, что эти неравенства для функций f, P, Q будут следовать из неравенства $\max_k \Delta l_k < \delta$.

Тогда при указанном условии на $\max_k \Delta l_k$ получим неравенства

$$|\sigma_f - I_f| \leq \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^n \Delta l_k = \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} |\sigma_p - I_p| &\leq \frac{\varepsilon}{M_1(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M_1(\beta - \alpha)} M_1 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sigma_q - I_q| &\leq \frac{\varepsilon}{M_2(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi'(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M_2(\beta - \alpha)} M_2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon. \square \end{aligned}$$

1°. Линейное свойство. Если для функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой AB и если α и β — любые постоянные, то для функции $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ также существует криволинейный интеграл по кривой AB , причем

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dl = \alpha \int_{AB} f(x, y) dl + \beta \int_{AB} g(x, y) dl.$$

2°. Аддитивность. Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB , не имеющих общих внутренних точек, и если для функции $f(x, y)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB , то для этой функции существует криволинейный интеграл по каждой из дуг AC и CB , причем

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl.$$

3°. Оценка модуля интеграла. Если существует криволинейный интеграл по кривой AB от функции $f(x, y)$, то существует и криволинейный интеграл по кривой AB от функции $|f(x, y)|$, причем

$$\left| \int_{AB} f(x, y) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y)| dl.$$

4°. Формула среднего значения. Если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой AB , то на этой кривой найдется точка M такая, что

$$\int_{AB} f(x, y) dl = l f(M),$$

где l — длина кривой AB .

В случае, если L — замкнутая кривая, под интегралом $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ понимают обычно интеграл,

соответствующий обходу контура L в положительном направлении (при котором область, лежащая внутри этого контура остаётся слева), т.е. против часовой стрелки для односвязной области.

Теорема 3.7. Пусть выполнены следующие условия: 1) область D такова, что любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает границу Γ по целому отрезку $[y_1(x), y_2(x)]$ либо не более чем в двух точках, ординаты которых суть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \leq y_2(x)$ (рис. 3.3); 2) функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и для любого $x \in [x_1, x_2]$ допускает существование однократного интеграла

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

($[x_1, x_2]$ — проекция области D на ось Ox). Тогда существует повторный интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

и справедливо равенство

2°. Дивергенция поля и ротация (вихрь) поля. Если

$$a(r) = a_x(x, y, z) i + a_y(x, y, z) j + a_z(x, y, z) k$$

есть непрерывно дифференцируемое векторное поле, то скаляр

$$\operatorname{div} a \equiv \nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется дивергенцией или расходимостью этого поля.

Вектор

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

носит название ротации или вихря поля.

Определение 2. Векторное поле $a(M)$ называется дифференцируемым в точке M области D , если его полное приращение $\Delta a(M)$ представляется в виде

$$\Delta a(M) = Ah + o(\|h\|), \quad (6.19)$$

где A — некоторый линейный оператор в E^3 ,

$$h = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, \quad \|h\| = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2},$$

$o(\|h\|)$ — вектор, длина которого стремится к нулю при $\|h\| \rightarrow 0$.

1. Формула Грина. Пусть π — плоскость в пространстве E^3 , $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали к π , D — односвязная область на π (напомним, что область D называется односвязной, если любая кусочно гладкая замкнутая без самопересечений кривая, расположенная в D , ограничивает область, все точки которой также принадлежат D). Пусть, далее, область D удовлетворяет следующим двум условиям:

1) граница C области D является замкнутой кусочно гладкой кривой без особых точек;

2) на плоскости π можно выбрать такую декартову прямоугольную систему координат, что все прямые, параллельные координатным осям, пересекают C не более чем в двух точках.

Пусть, наконец, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к кривой C , согласованный с $\mathbf{k}$, т. е. положительное направление обхода кривой C совпадает в точке приложения вектора $\mathbf{t}$ с направлением этого вектора, и если смотреть с конца нормали $\mathbf{k}$, то контур C ориентирован положительно (его обход осуществляется против часовой стрелки). Говорят, что ориентация кривой C согласована с нормалью «по правилу штопора».

Теорема 6.1 (формула Грина). Пусть $\mathbf{a}$ — векторное поле, дифференцируемое в области D , удовлетворяющей условиям 1), 2), и такое, что его производная по любому направлению непрерывна в объединении $D \cup C = \bar{D}$. Тогда справедлива формула

$$\iint_{\bar{D}} (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) d\sigma = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl. \quad (6.25)$$

Выражение справа обычно называют циркуляцией векторного поля $\mathbf{a}$ по кривой C , а выражение слева — потоком векторного поля $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ через область D .

Данная формула допускает такую физическую трактовку: поток векторного поля $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ через область D (поток тепла, жидкости и т. п.) равен циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру C (работе сил поля $\mathbf{a}$ по перемещению точки вдоль C).

Заметим также, что интегралы слева и справа в формуле (6.25) инвариантны относительно выбора прямоугольной системы координат, поскольку величины $(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ инвариантны, элементы площади $d\sigma$ и длины дуги dl не зависят от выбора декартовой системы координат. Поэтому достаточно доказать формулу (6.25) в какой-то одной специально выбранной системе.

Выберем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы выполнялось условие 2), и ось Oz направим вдоль $\mathbf{k}$. Поскольку векторное поле $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} + R(x, y)\mathbf{k}$ плоское, то $R(x, y) \equiv 0$, $\mathbf{t} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, 0\} = \{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\}$.

Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Далее,

$$(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{t}) = P \cos \alpha + Q \sin \alpha.$$

Так как для плоской области $d\sigma = dx dy$, то формула (6.25) принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{D}} (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) d\sigma &= \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \oint_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = \oint_C P dx + Q dy. \end{aligned} \quad (6.25')$$

Здесь мы воспользовались тем, что $dx = \cos \alpha dl$, $dy = \sin \alpha dl$, где l — длина дуги C , выбранная в качестве параметра, возрастание которого согласовано с направлением обхода C .

Для доказательства формулы Грина достаточно доказать два равенства:

$$I = - \iint_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx,$$

$$J = \iint_{\bar{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy.$$

Обратимся для наглядности к рис. 6.1. Пусть прямая, параллельная оси Oy , пересекает C в точках $(x, y_1(x))$ и $(x, y_2(x))$, $y_1(x) \leq y_2(x)$. Пусть x_1 и x_2 — наименьшая и наибольшая абсциссы точек области $\bar{D}$, кривая C_1 соединяет точку $(x_1, y_1(x_1))$ с точкой $(x_2, y_1(x_2))$, а кривая C_2 — точку $(x_2, y_2(x_2))$ с точкой $(x_1, y_2(x_1))$ и $C = C_1 \cup C_2$, C_1, C_2 ориентированы согласованно с C . Тогда по формуле сведения двойного интеграла к повторному получим

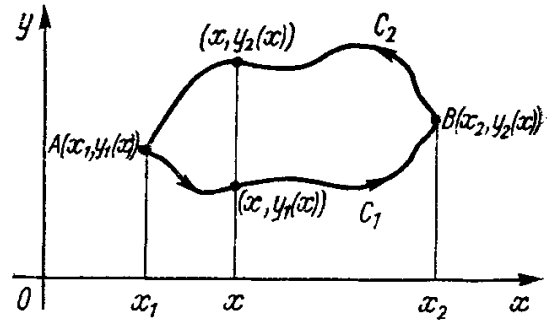


Рис. 6.1

$$I = - \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x)) dx - \\ - \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x)) dx = \int_{C_1} P dx - \left(- \int_{C_2} P dx \right) = \oint_C P dx.$$

Аналогично вычисляется интеграл J . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 6.1 справедлива и для более общих областей D (с границей C) таких, что с помощью конечного числа кусочно гладких кривых эта область может быть разбита на конечное число областей D_i с границами C_i , $i=1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Действительно, для каждой области D_i по доказанному формула верна. Сложив эти равенства,

в силу аддитивности двойного интеграла слева $\sum_{i=1}^n \iint_{D_i}$ можно

заменить на $\iint_D$, а справа $\sum_{i=1}^n \oint_{C_i} = \oint_C$, поскольку интегралы по «внутренним» кривым¹⁾ сократятся (так как интегрирование по ним производится в противоположных направлениях). Останется

лишь интеграл по границе C области D .

З а м е ч а н и е 2. В формулировке теоремы 6.1 от условия 2) можно избавиться, т. е. считать, что граница области D есть любая замкнутая кусочно гладкая кривая C без особых точек. Однако доказательство теоремы несколько усложняется.

З а м е ч а н и е 3. Условие на гладкость векторного поля можно также несколько ослабить. Достаточно требовать, чтобы поле $\mathbf{a}$ было непрерывно в $D \cup C = \bar{D}$, а дифференцируемо только в D , и производная по любому направлению была непрерывна в D . Формула (6.25) при этом сохраняется, однако входящий в нее двойной интеграл является при этом, вообще говоря, несобственным.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 6.1, т. е. формула Грина, верна и в общем случае областей D с границей C , являющейся только спрямленной кривой¹²⁾.

З а м е ч а н и е 5. Формула Грина (6.25) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде (6.25'):

$$\iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy.$$

Интегралы слева и справа имеют инвариантный характер, т. е. их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Действительно, значения подынтегральных выражений слева и справа в формуле (6.25') равны соответственно $(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ — инвариантным величинам. Форма подынтегральных выражений в формуле (6.25') тоже, очевидно, не меняется при переходе к новой декартовой системе координат $Ox'y'$; если в новом базисе векторное поле $\mathbf{a}$ имеет координаты P' и Q' , то

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \left(\mathbf{k}, \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} \right) \mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl = P dx + Q dy = \\ &= (P' \cos \alpha' + Q' \sin \alpha') dx = P' dx' + Q' dy'. \end{aligned}$$

Наконец, якобиан преобразования при переходе к новой системе координат по модулю равен единице, а параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат. Поэтому интегралы слева и справа в (6.25') не меняют своего значения и формы.

Формула Грина имеет простой гидродинамический смысл: поток жидкости через границу L области D , текущей по плоскости Oxy со скоростью $\vec{V} = (Q, -P)$, равен интегралу по области D от интенсивности распределенных в D источников и стоков (т.е. от дивергенции $\text{div} \vec{V} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$). В этом смысле формула (1) подобна формуле Остроградского. Формула (1) является

5. Формула (1) сводит вычисление площади S области $D \subset Oxy$ к криволинейному интегралу. Для этого надо выбрать удовлетворяющие условиям применимости формулы Грина такие две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ в области D .

Тогда
$$S = \iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

Например, справедливы равенства

$$S = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

Пример. Область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметрические уравнения эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (t – полярный угол на плоскости Oxy) позволяют

найти площадь области D :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt = \pi ab.$$

7. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция.

1. Рассмотрим две комплексные плоскости Z и W . Пусть комплексные числа z и w заданы, например, в алгебраической форме: $z = x + iy$, $w = u + iv$. Это значит, что на обеих плоскостях введены декартовы системы координат Oxy и Ouv . Одну и ту же точку плоскости принято рассматривать двояко: как точку комплексной плоскости (геометрический образ комплексного числа) и как точку действительной плоскости, имеющую действительные координаты в заданной системе координат. Областью на комплексной плоскости называется связное открытое множество точек этой плоскости. Например, областями на плоскости Z являются откры-

тый круг с центром в точке z_0 радиуса r $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ и вся комплексная плоскость Z . Часто рассматривают замыкание области D — замкнутую область $\bar{D}$. К комплексной плоскости Z часто добавляют воображаемое комплексное «число» $z = \infty$ и тогда говорят о расширенной комплексной плоскости (считается, что модуль этого «числа» равен $+\infty$, а аргумент его не определён). Комплекснозначная функция $w = f(z)$ комплексного переменного z — это однозначное отображение из плоскости Z в W . Такую функцию можно определить на произвольном множестве плоскости Z , но основной интерес представляет случай, когда областью определения функции f является некоторая область $D \subset Z$. Задать такую функцию можно, например, задавая две функции двух независимых действительных переменных: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Если каждому двум различным точкам z_1 и z_2 соответствуют разные образы $f(z_1)$ и $f(z_2)$, т.е. из условия $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$, то функция f называется однолистной. Для однолистного отображения $w = f(z)$ можно ввести однозначную обратную функцию $f^{-1}: W \rightarrow Z$.

Пусть $f(z)$ определена на множестве E , для которого точка z_0 – предельная точка. Определение предельного значения функции по Коши и запись $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \exists z \in E, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Иногда пишут $\lim_{\substack{z \in E \\ z \rightarrow z_0}} f(z) = w$, когда хотят подчеркнуть, что рассматривают предельное значение функции по множеству E .

Теорема 2. Для того, чтобы существовал предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w = a + ib$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b.$$

Доказательство следует из выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - a| &\leq |f(z) - w| = \sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2} \leq \\ &\leq |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b|, \\ |f(z) - w| &\geq |v(x, y) - b|. \end{aligned}$$

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$, точка $z_0 \in E$, z_0 – предельная точка множества E . По определению функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Иногда говорят, что функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 по множеству E . Функция непрерывная в каждой точке $z \in E$ называется функцией непрерывной на множестве E . Класс непрерывных функций на множестве E будем обозначать $C(E)$.

Теорема 3. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы действительные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0) .

Доказательство следует из теоремы 2 и определения непрерывной функции.

2. Определение. Пусть функция $w = f(z)$ определена в области D и $z_0 \in D$. Если существует конечный предел

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, то этот предел называется производной

$f'(z_0)$ функции f в точке z_0 , а сама функция f — дифференцируемой в точке z_0 .

Положим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ и $\Delta f = f(z) - f(z_0)$, $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = z - z_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, где $\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0)$, $\Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Предположим, что $\exists f'(z_0)$, тогда $\frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) = \bar{o}(1)$, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{o}(1) = 0$.

Тогда $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$.

Определение. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой, если приращение $\Delta f = A\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{o}(1) = 0$, A не зависит от Δz .

Итак, если $\exists f'(z_0)$, то функция $f(z)$ дифференцируема, если она дифференцируема, то $\exists f'(z_0) = A$.

Из дифференцируемости следует непрерывность. Достаточно найти $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (A\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z) = 0$.

Замечание. Данное определение требует, чтобы предел разностного отношения существовал вне зависимости от способа стремления Δz к нулю. Например, для функции

$w = f(z) = \bar{z} = x - iy$ ни в одной точке z_0 указанный предел не существует. Действительно, если положить $\Delta z = \Delta x$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = 1,$$

а если положить $\Delta z = i \cdot \Delta y$, то

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta y) - f(z_0)}{\Delta y} = -1.$$

Существование производной в

точке z_0 означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$ следует неравен-

ство $\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$. То есть последнее неравенство

выполнено для всех точек $z = z_0 + \Delta z$ из круга $\{z \mid |z - z_0| < \delta(\varepsilon)\}$.

Теорема. Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ одного комплексного переменного $z = x + iy$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций двух действительных переменных $u(x, y)$ и

$v(x, y)$ по x и по y , причём имеют место соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Пусть $f(z)$ — дифференцируемая функция в точке z_0 , т.е. $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$.

Обозначим $f'(z_0) = a + ib$, $\bar{o}(1) = \bar{o}_1(1) + i\bar{o}_2(1)$, причем $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{o}_1(1) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{o}_2(1) = 0$
Имеем

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + [\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_2(1)](\Delta x + i\Delta y),$$

отсюда

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x - \bar{o}_2(1)\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta y + \bar{o}_2(1)\Delta x.$$

Так как $\Delta z \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$. Получаем, что функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и при этом

$$u'_x = a, \quad u'_y = -b, \quad v'_x = b, \quad v'_y = a, \quad f'(z_0) = u'_x + iv'_x,$$

или

$$\boxed{u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x} \text{ — условия Коши-Римана} \quad (1)$$

или условия Эйлера-Даламбера.

Теорема. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) , а их частные производные связаны в этой точке условиями Коши-Римана. Тогда функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Предположим, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены условия (1).

Пусть $u'_x = a = v'_y$, $u'_y = -b = -v'_x$.

Имеем

Имеем

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \bar{o}_3(1)\Delta x + \bar{o}_4(1)\Delta y,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \bar{o}_1(1) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \bar{o}_2(1) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \bar{o}_3(1) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \bar{o}_4(1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i\Delta v &= a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y + ib\Delta x + ia\Delta y + i\bar{o}_3(1)\Delta x + \\ &+ i\bar{o}_4(1)\Delta y = \Delta x(a + ib) + \Delta y(-b + ia) + \Delta x(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)) + \Delta y(\bar{o}_2(1) + \\ &+ i\bar{o}_4(1)) = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \Delta x(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)) + \Delta y(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)). \end{aligned}$$

Тем самым

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib + \frac{\Delta x}{\Delta z}(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)) + \frac{\Delta y}{\Delta z}(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)),$$

так как $|\Delta x| \leq |\Delta z|$, $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, то

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib = f'(z_0) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x.$$

Итак, доказана теорема

Условия Коши-Римана можно записать и в других формах, если на плоскостях Z и W вместо декартовых ввести другие системы координат. Например, если $w = f(z) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$ (на плоскости Z введена полярная система координат, а на плоскости W — декартова), то условия Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial V}{\partial r}. \quad \text{Если же}$$

$w = f(z) = R(x, y) \cdot e^{i\Phi(x, y)}$ (на плоскости Z введена декартова система координат, а на плоскости W — полярная), то условия

$$\text{Коши-Римана имеют вид } \frac{\partial R}{\partial x} = R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

3. **Определение.** Однозначная функция $w = f(z)$, определённая в области $D \subset Z$, называется аналитической в D , если она дифференцируема в каждой точке области D .

Если в данном определении наряду с дифференцируемостью функции f в каждой точке области D потребовать непрерывности её производной в D , то получим тот же самый класс аналитических в D функций. Поэтому необходимым и достаточным условием аналитичности в D функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является существование в D непрерывных частных производных функций u и v , связанных условиями Коши-Римана.

Определение. Функция $f(z)$ называется аналитической (голоморфной, регулярной, правильной, моногенной) в области D , если она в области D имеет производную $f'(z) \in C(D)$.

Замечание 1. Вообще говоря, условие непрерывности производной $f'(z)$ лишнее, уже из существования $f'(z)$ следует, что $f'(z)$ – непрерывная функция. Смотри, например, Маркушевич (10). Доказательство этого факта требует много времени, поэтому мы будем предполагать непрерывность производной.

Свойства аналитических функций.

1) Аналитическая в области D функция непрерывна в D .
2) Сумма и произведение аналитических функций являются аналитическими функциями. Частное $\frac{f(z)}{g(z)}$ двух аналитических функций является аналитической функцией всюду, где $g(z) \neq 0$.

3) Если $w = f(z)$ и $t = g(w)$ – аналитические функции, и если определена сложная функция $t = g(f(z))$, то она является аналитической функцией переменного z .

4) Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D , и в окрестности точки $z_0 \in D$ $f'(z) \neq 0$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0) \in W$ определена обратная функция $z = g(w)$, являющаяся аналитической функцией переменного w . При этом

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(w_0)}.$$

5) Действительная и мнимая части аналитической в области D функции комплексного переменного z являются гармоническими в D функциями двух действительных переменных.

6) Если $f(z)$ является аналитической функцией, а $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, то семейства кривых $u(x, y) = C = \text{const}$ и $v(x, y) = C = \text{const}$ на плоскости Oxy ортогональны.

4. Пусть $f(z)$ – комплекснозначная функция комплексного переменного z , $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, $z = x + iy$. Интегралом по лежащей в области определения f кривой L называется

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L u(x, y) dy + v(x, y) dx.$$

Теорема. Пусть заданная в односвязной области D функция $f(z)$ является в этой области однозначной аналитической функцией. Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру L , лежащему в D , равен нулю: $\oint_L f(z) dz = 0$.

Теорема. Пусть заданная в односвязной области D функция $f(z)$ непрерывна, а интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру L , лежащему в D , равен нулю. Тогда $f(z)$ является аналитической функцией в области D .

Теорема. Пусть замкнутый контур L лежит в области аналитичности функции $f(z)$, а точка z_0 находится внутри L . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда или $|f(z)| \equiv \text{const}$, или $\max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$ достигается только на границе области.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда во внутренних

точках области D существует производная любого порядка функции $f(z)$.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости Z . Если её модуль $|f(z)|$ равномерно ограничен, то $f(z) \equiv \text{const}$.

Теорема. Аналитическая внутри круга $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ функция $f(z)$ однозначно представима в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, где $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Теорема. Пусть две функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в одной и той же области D . Если в D существует последовательность различных точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке $z_0 \in D$, в которых значения функций f и g совпадают, то $f(z) \equiv g(z)$ в D .

5. Ещё одно свойство аналитических функций связано с конформностью осуществляемых ими отображений. Если D – область на комплексной плоскости Z и $w = f(z)$ – аналитическая в D функция, то образ $f(D)$ области D также является областью. Предположим, что в точке $z_0 \in D$ $f'(z_0) \neq 0$. Тогда комплексное число $f'(z_0)$ можно представить в показательной форме: $f'(z_0) = k \cdot e^{i\alpha}$. Рассмотрим две гладкие кривые L_1 и L_2 на плоскости Z , пересекающиеся в точке z_0 . Образы $f(L_1)$ и $f(L_2)$ этих кривых при отображении f являются гладкими кривыми на плоскости W , пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. Оказывается, что углы пересечения кривых L_1 , L_2 и $f(L_1)$, $f(L_2)$ равны. Если на плоскостях Z и W выбрать декартовы системы координат Oxy и Ouv , $z = x + iy$, $w = u + iv$, то можно ввести угол φ между касательной к кривой L в точке z_0 и

положительным направлением оси x ; аналогично можно ввести угол Φ между касательной к кривой $f(L)$ в точке w_0 и положительным направлением оси u . Тогда $\alpha = \arg f'(z_0) = \Phi - \varphi$ вне зависимости от выбора кривой L , т.е. α является углом поворота в точке z_0 . $k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ является коэффициентом растяжения в точке z_0 . Это значит, что для приращений Δz и Δw в точках z_0 и w_0 с точностью до величины порядка $o(|\Delta z|)$ при $\Delta z \rightarrow 0$ имеет место равенство $|\Delta w| = k \cdot |\Delta z|$ вне зависимости от выбора способа приращения Δz . Таким образом, в точке z_0 отображение $w = f(z)$ непрерывно и сохраняет в окрестности z_0 форму бесконечно малых фигур. Такое отображение называется конформным. Конформное отображение любую бесконечно малую фигуру переводит в подобную ей с коэффициентом подобия k , поворачивая эту фигуру целиком на угол α . Следует помнить, что описанное действие конформного отображения локально, оно относится только к окрестности фиксированной точки z_0 .

Определение. Взаимно однозначное непрерывное отображение f области $D \subset Z$ на область $f(D) \subset W$ называется конформным отображением, если во всех точках $z \in D$ оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Теорема. Однолистная аналитическая в области D функция $w = f(z)$ со всюду в D отличной от нуля производной, и только такая функция, осуществляет конформное отображение области $D \subset Z$ на область $f(D) \subset W$.

8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости.

1. Пусть x – действительная переменная, x_0 – действительное число. Функциональный ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$, где коэффициенты a_k – действительные постоянные (они не зависят от x), называется степенным рядом.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} k! \cdot x^k$. Этот ряд сходится в единственной точке $x = x_0 = 0$.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. По признаку Даламбера ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ сходится при любом x , т.е. заданный степенной ряд сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ абсолютно сходится в каждой точке интервала $-1 < x < 1$ и расходится всюду вне этого интервала.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ сходится в каждой точке множества $-1 \leq x < 1$ и расходится всюду вне этого множества. На интервале $-1 < x < 1$ ряд сходится абсолютно, а в точке $x = -1$ – условно.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ абсолютно сходится в каждой точке сегмента $-1 \leq x \leq 1$ и расходится всюду вне этого сегмента.

Теорема. Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ не ограничена, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ сходится только при $x = x_0$.

Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ ограничена, и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ абсолютно сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ ограничена, и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ абсолютно сходится при всех x .

Доказательство. Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ не ограничена, то при $x \neq x_0$ и последовательность $\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0|^k \right\}$ не ограничена. То есть некоторая её подпоследовательность $\left\{ \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \cdot |x - x_0|^{k_n} \right\}$ стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда для исходного степенного ряда не выполнено необходимое условие сходимости: при $x \neq x_0$ общий член ряда не стремится к нулю. Пусть $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l > 0$. Если $|x - x_0| < \frac{1}{l}$, то для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|x - x_0| < \frac{1}{l + \varepsilon}$. Поскольку l — верхний предел последовательности $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$, то для всех k , начиная с некоторого номера $K(\varepsilon)$,

выполнено неравенство $\sqrt[k]{|a_k|} < l + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для всех $k \geq K(\varepsilon)$

имеем $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0|^k < \frac{l + \varepsilon/2}{l + \varepsilon} < 1$, и при $|x - x_0| < \frac{1}{l}$ исходный степенной ряд абсолютно сходится по признаку Коши. Если же $|x - x_0| > \frac{1}{l}$, то для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенст-

во $|x - x_0| > \frac{1}{l - \varepsilon}$. Поскольку l — верхний предел последова-

тельности $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$, то найдётся подпоследовательность $\{\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}\}$,

сходящаяся к l при $n \rightarrow \infty$. То есть, для всех k_n , начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$l - \varepsilon < \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} < l + \varepsilon$. Но тогда для всех таких k_n выполнено не-

равенство $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \cdot |x - x_0|^{k_n} > \frac{l - \varepsilon}{l + \varepsilon} = 1$, и при $|x - x_0| > \frac{1}{l}$ ис-

ходный степенной ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Пусть, наконец, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$. Тогда у последова-

тельности $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ нет других предельных точек, т.е.

$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$. Поэтому при $x \neq x_0$ для числа

$\varepsilon = \frac{1}{2|x - x_0|} > 0$ найдётся такой номер $K(\varepsilon)$, что для всех номеров $k \geq K(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\sqrt[k]{|a_k|} < \varepsilon$. Но тогда для всех таких k выполнено неравенство $\sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} < \frac{1}{2} < 1$, и исходный степенной ряд абсолютно сходится по признаку Коши. А при $x = x_0$ все члены ряда при $k \geq 1$ равны нулю. $\square$

Таким образом, степенной ряд абсолютно сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $R = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right]^{-1}$, и расходится вне этого интервала. При этом возможны случаи $R = 0$ (тогда интервал сходимости вырождается в точку x_0) и $R = +\infty$. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда. На границе интервала сходимости поведение степенного ряда может быть каким угодно.

Лемма. Каково бы ни было положительное число r , удовлетворяющее условию $r < R$, ряд (2.61) равномерно сходится на сегменте $[-r, +r]$, т. е. при $|x| \leq r$.

Доказательство. В силу теоремы 2.14 ряд (2.61) абсолютно сходится при $x=r$, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Но этот числовой ряд служит мажорантным для ряда (2.61) при всех x из сегмента $[-r, +r]$. На основании признака Вейерштрасса ряд (2.61) сходится равномерно на сегменте $[-r, +r]$. Лемма доказана.

Следствие из леммы. В условиях леммы сумма ряда (2.61) является функцией, непрерывной на сегменте $[-r, +r]$ (в силу теоремы 2.7).

Теорема 2.15. Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.

Доказательство. Пусть $S(x)$ — сумма степенного ряда (2.61), а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x внутри промежутка сходимости, т. е. такое, что $|x| < R$. Всегда найдется число r такое, что $|x| < r < R$. В силу следствия из леммы функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r, +r]$. Следовательно, $S(x)$ непрерывна и в точке x . Теорема доказана.

Теорема 2.16. Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда (2.61), а x удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд (2.61)

можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный ряд.

Доказательство. Для любого x , удовлетворяющего условию $|x| < R$, найдется r такое, что $|x| < r < R$. Согласно лемме ряд (2.61) сходится равномерно на сегменте $[-r, +r]$, а следовательно, и на сегменте $[0, x]$. Но тогда в силу теоремы 2.8 этот ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$.

В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots,$$

радиус сходимости которого (согласно теореме 2.14) является величиной, обратной верхнему пределу последовательности

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \quad (2.64)$$

Так как верхний предел последовательности (2.64) тот же, что и у (2.62) ¹⁰⁾, то теорема доказана.

$$\begin{aligned} 10) \text{ Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{|a_n|}\}^{\frac{n}{n+1}} = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \end{aligned}$$

Теорема 2.17 *Степенной ряд (2.61) внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 2.9 и леммы) доказать лишь второе утверждение теоремы.

В результате почленного дифференцирования (2.61) получим ряд

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots,$$

радиус сходимости R которого (согласно теореме 2.14) обратен верхнему пределу последовательности

$$\left\{ \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \right\}. \quad (2.65)$$

Так как последовательность (2.65) имеет тот же верхний предел, что и (2.62)¹¹⁾, то теорема доказана.

11) Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}^{\frac{n}{n-1}} =$
 $= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(-R, +R)$ (на множестве $\{x\}$) может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном интервале (указанном множестве).

Утверждение 1. Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, +R)$, необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка¹²⁾.

Действительно, степенной ряд внутри его промежутка сходимости, который во всяком случае содержит интервал $(-R, +R)$, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, причем все полученные при этом ряды сходятся внутри того же промежутка сходимости (теорема 2.17).

Но тогда суммы рядов, полученных сколь угодно кратным дифференцированием (в силу теоремы 2.15), представляют собой функции, непрерывные внутри указанного промежутка сходимости, а следовательно, непрерывные на интервале $(-R, +R)$.

12) Отметим, что существуют функции, имеющие на интервале непрерывные производные любого порядка, но не разложимые на этом интервале в степенной ряд. Примером такой функции может служить

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ может быть на интервале $(-R, +R)$ разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.

В самом деле, пусть функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, +R)$ в степенной ряд (2.61). Дифференцируя этот ряд почленно n раз (что заведомо можно делать внутри интервала $(-R, +R)$), получим

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + a_{n+1} (n+1)! x + \dots$$

Отсюда при $x=0$ найдем

$$f^{(n)}(0) = a_n n!,$$

или

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (2.66)$$

Таким образом, коэффициенты степенного ряда (2.61), в который может быть разложена функция $f(x)$, однозначно определяются формулой (2.66).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ имеет на интервале $(-R, +R)$ непрерывные производные любого порядка.

Определение 2. Степенной ряд (2.61), коэффициенты которого определяются формулой (2.66), называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

Утверждение 2 приводит нас к следующему утверждению.

Утверждение 3. Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, +R)$ в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.

Из результатов § 8 гл. 6 ч. 1 непосредственно вытекает следующее

Утверждение 4. Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(-R, +R)$ (на множестве $\{x\}$), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале (указанном множестве).

3. Формула Маклорена. Принято называть формулой Маклорена * формулу Тейлора (6.33) с центром в точке $a=0$. Таким образом, формула Маклорена дает представление функции в окрестности точки $x=0$. Запишем формулу Маклорена для произвольной функции с остаточным членом в форме Лагранжа, Коши и Пеано**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x), \quad (6.54)$$

где остаточный член имеет вид:

1) в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1); \quad (6.55)$$

2) в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x); \quad (6.56)$$

3) в форме Пеано

$$R_{n+1}(x) = o(x^n). \quad (6.57)$$

(Мы использовали формулы (6.46), (6.47) и (6.48).)

Замечание. Последняя теорема не утверждает, что любую бесконечно дифференцируемую функцию действительной переменной можно разложить в степенной ряд на любом заданном интервале.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ бесконечно дифференцируема на $-\infty < x < +\infty$.

Но разложить её в степенной ряд по степеням переменной x можно только на интервале $-1 < x < 1$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k}; \text{ вне этого интервала указанный ряд расходится.}$$

Однако ту же самую функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ можно разложить в степенной ряд по степеням переменной $(x-x_0)$,

$x_0 \neq 0$, При этом снова получим некоторый конечный интервал сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$.

Пример. $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \rho_{k+1}(x)$,
 где остаточный член в форме Лагранжа равен
 $\rho_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$. При любом фиксированном x ,
 $-\infty < x < +\infty$, $\rho_{k+1}(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому на бесконеч-
 ном интервале $-\infty < x < +\infty$ имеем разложение $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Пример.
 $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \rho_{k+1}(x)$, где
 остаточный член $\rho_{k+1}(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ только для
 $-1 < x \leq 1$. Поэтому $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$ только для
 $-1 < x \leq 1$.

4. Пусть теперь z — комплексная переменная, z_0 — ком-
 плексное число, $\{a_k\}$ — последовательность комплексных чисел.

Теорема. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ сходится в
 некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в открытом
 круге $\{z \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$. Для любого числа r ,
 $0 < r < |z_1 - z_0|$, в замкнутом круге $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ этот ряд схо-
 дится равномерно.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ в точке

z , удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Обозначим че-

рез q отношение $\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$; $q = q(z)$, $0 < q < 1$. Из сходимости

числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z_1 - z_0)^k$ следует, что его общий член

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для некоторого положи-
тельного числа M и для всех номеров k выполнены неравенства

$|a_k \cdot (z_1 - z_0)^k| \leq M$. Следовательно, для всех k

$$|a_k| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|^k}. \quad \text{Но} \quad \text{тогда}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} [q(z)]^k. \quad \text{Из усло-$$

вия $0 < q < 1$ теперь следует сходимость степенного ряда в вы-

бранной точке z . Если же точку z выбрать из условия

$$|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|, \quad \text{то}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{|z_1 - z_0|^k}, \quad \text{причём}$$

последняя оценка не зависит от z . Тогда по признаку Вейерштрасса степенной ряд сходится в круге $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ равномерно. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ расходится в точке z_1 , то он расходится всюду на множестве $\{z \mid |z - z_0| > |z_1 - z_0|\}$. Поэтому, если степенной ряд расходится в какой-либо точке, то расстояния от точки z_0 до всех точек z , в которых он сходится, ограничены сверху. Пусть R — точная верхняя грань таких расстояний. Если $R > 0$, то областью сходимости степенного ряда является круг $\{z \mid |z - z_0| < R\}$. Вне указанного круга ряд расходится, а на границе $|z - z_0| = R$ он может как сходиться, так и расходиться — в зависимости от точки z на этой границе.

Теорема. Для всякого степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$, сходящегося не только в точке $z = z_0$, областью его сходимости является открытый круг $\{z \mid |z - z_0| < R\}$. Радиус этого круга равен $R = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right]^{-1}$. Если $R > 0$, то для любого числа r , $0 < r < R$, в замкнутом круге $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ ряд сходится равномерно. В круге сходимости сумма степенного ряда является аналитической функцией. В круге сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, причём получающиеся при этом новые степенные ряды имеют тот же самый круг сходимости. Если $f(z)$ — сумма степенного ряда, то
$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

$k!$

Теорема. Аналитическая в круге $\{z \mid |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$. Это представление однозначно, его коэффициенты равны $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

В отличие от случая бесконечно дифференцируемой функции действительной переменной теперь можно утверждать существование разложения аналитической в заданном круге функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора. Более того, на границе его круга сходимости найдётся особая точка аналитической функции $f(z)$.

Поэтому радиусом сходимости ряда Тейлора является расстояние от z_0 до ближайшей особой точки аналитической функции $f(z)$.

Пример. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Особыми точками этой функции являются $z = \pm i$. Разложение $f(z)$ по степеням переменной z имеет вид $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k}$. Последний ряд сходится в круге $\{z \mid |z| < 1\}$, на границе которого и лежат точки $z = \pm i$. Если в качестве z_0 выбрать произвольное действительное число, $z_0 = x_0$, то радиусом сходимости разложения $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - x_0)^k$ будет $R = \sqrt{|x_0|^2 + |\pm i|^2} = \sqrt{x_0^2 + 1}$. Именно поэтому для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ действительной переменной x равенство

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ выполнено только в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, а не на всей действительной оси.

9. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.

1. Линейное пространство называется нормированным, если каждому его элементу f поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$, называемое его нормой. Норма удовлетворяет аксиомам: $\|f\| \geq 0$, причём $\|f\| = 0$ только для $f = 0$; для любого числа α $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$; $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. В нормированном пространстве можно ввести сходимость последовательности его элементов $\{f_k\}$: говорят, что $\{f_k\}$ сходится к элементу f того же пространства, если числовая последовательность $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Например, элемент f называется суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, составленного из элементов f_k нормированного пространства, если последовательность частичных сумм этого ряда $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ сходится по норме к элементу f : $\|S_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Линейное пространство называется евклидовым, если любым двум его элементам f и g поставлено в соответствие число (f, g) , называемое их скалярным произведением. Скалярное произведение удовлетворяет аксиомам: $(f, g) = (g, f)$ (в таком виде аксиома должна выполняться в линейном пространстве над полем действительных чисел); $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$; для любого числа α $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$; $(f, f) > 0$ при $f \neq 0$, $(f, f) = 0$ только при $f = 0$. Скалярное произведение позволяет ввести евклидову норму: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Пример. Множество всех непрерывных на сегменте $a \leq x \leq b$ функций $f(x)$ образует линейное пространство. В нём можно ввести норму $\|f\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Сходимость по этой норме является равномерной сходимостью на сегменте $a \leq x \leq b$. В том же линейном пространстве можно ввести скалярное произведе-

ние $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ и евклидову норму

$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$. Сходимость по этой евклидовой норме называ-

ется сходимостью в среднем квадратическом. Из неравенства

$\sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ следует, что из сходимости

последовательности функций $\{f_k\}$ по норме $\|\cdot\|_C$ вытекает сходи-

мость той же последовательности по евклидовой норме $\|\cdot\|$. Но

можно построить последовательность функций $\{f_k\}$, которая сходится по норме $\|\cdot\|$, но не сходится по норме $\|\cdot\|_C$. Более того, можно

построить последовательность $\{f_k\}$, которая сходится по норме $\|\cdot\|$, но не сходится ни в одной точке сегмента $a \leq x \leq b$.

2. Пусть в бесконечномерном линейном нормированном пространстве фиксирован элемент f и некоторое множество M . Задача об отыскании $\inf_{g \in M} \|f - g\|$ называется задачей о наилучшем приближении элемента f элементами множества M . Эта задача имеет простое решение, если норма $\|\cdot\|$ евклидова, а элементами множества M являются всевозможные линейные комбинации элементов заданной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$.

Определение. Последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов евклидова пространства называется ортонормированной системой, если

$$(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Зафиксируем элемент f действительного евклидова пространства и ортонормированную систему его элементов $\{\psi_k\}$. Будем приближать f линейными комбинациями $\sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ первых n элементов этой системы по евклидовой норме. Поставим задачу о выборе наилучших коэффициентов c_k при фиксированном n .

Теорема. При фиксированном n $\min_{\{c_k\}} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|$ достигается при выборе коэффициентов $c_k = (f, \psi_k)$. (Числа (f, ψ_k) называются коэффициентами Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$.)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, \psi_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^n c_k^2 (\psi_k, \psi_k) = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - (f, \psi_k))^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^n (c_k - (f, \psi_k))^2 \geq 0$, то для любых коэффициентов $\{c_k\}$ выполнено неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2,$$

а при выборе $c_k = (f, \psi_k)$, $k = 1, \dots, n$ оно превращается в равенство. $\square$

Теорема. Для любого элемента f евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ числовой ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2$ сходится, и выполнено неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2 \leq \|f\|^2.$$

Доказательство.

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k) \cdot \psi_k \right\|^2 \geq 0. \quad \text{Поэтому при}$$

любом n $\sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 \leq \|f\|^2$. Это значит, что последователь-

ность частичных сумм ряда с неотрицательными членами

$\sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2$ ограничена. Поэтому указанный ряд сходится, и выполнено неравенство Бесселя. $\square$

Неравенство Бесселя означает, что не любая последовательность чисел может являться последовательностью коэффициентов Фурье некоторого элемента f . Например, числа $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ нельзя

рассматривать как коэффициенты Фурье какого-либо элемента f : ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

3. Определение. Если $\{\psi_k\}$ – ортонормированная система, то рядом Фурье элемента f называется $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \cdot \psi_k$.

Рассмотрим вопрос о сходимости частичных сумм ряда Фурье к элементу f по евклидовой норме $\|\cdot\|$. Ответ на этот вопрос зависит от выбранной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$.

Определение. Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если любой элемент f евклидова пространства можно с любой точностью приблизить по норме этого пространства линейными комбинациями $\sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ конечного числа элементов системы. (При этом число n зависит от выбранной точности приближения.)

Теорема. Для замкнутой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и для любого элемента f имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2 = \|f\|^2.$$

Доказательство. Из неравенства

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|^2$$

и из замкнутости системы $\{\psi_k\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$ и такие числа $c_1, \dots, c_N$, что

будет выполнено неравенство $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N (f, \psi_k)^2 < \varepsilon$. Тем

более будет выполнено неравенство $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 < \varepsilon$

для всех $n \geq N(\varepsilon)$. А это и значит, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2$ сходится

к сумме $\|f\|^2$. $\square$

Теорема. Для замкнутой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и для любого элемента f последовательность частичных сумм $\sum_{k=1}^n (f, \psi_k) \cdot \psi_k$ ряда Фурье сходится по евклидовой норме к элементу f .

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k) \cdot \psi_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 \right).$$

Для замкнутой системы $\{\psi_k\}$ последний предел равен нулю. $\square$

Определение. Если из условия ортогональности элемента f всем элементам ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ следует, что $f = 0$, то $\{\psi_k\}$ называется полной системой.

Очевидно, что если ортонормированная система замкнута, то она является полной. Это следует из равенства Парсеваля.

Теорема 8.6. Для всякой полной (и тем более для всякой замкнутой) ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g рассматриваемого евклидова пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

Доказательство. Если бы все коэффициенты Фурье элементов f и g совпадали, то все коэффициенты Фурье разности $(f-g)$ были бы равны нулю, т. е. разность $(f-g)$ была бы ортогональна ко всем элементам ψ_k полной системы $\{\psi_k\}$. Но это означало бы, что разность $(f-g)$ является нулевым элементом, т. е. означало бы совпадение элементов f и g . Теорема доказана.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общего ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе в любом евклидовом пространстве R .

4. Замечание. Часто приходится рассматривать ортогональные, но не нормированные системы $\{\psi_k\}$. Коэффициентами Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\psi_k\}$ называются числа $\frac{(f, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2}$. Если такая система замкнута, то выполнено равен-

$$\text{ство Парсеваля } \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \psi_k)^2}{\|\psi_k\|^2}.$$

Замечание. Равенство Парсеваля допускает обобщение: если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ замкнута, то для любых двух элементов f и g справедливо равенство

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \cdot (g, \psi_k).$$

Действительно, для замкнутой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ имеем равенства

$$\|f + g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f + g, \psi_k)^2, \quad \|f - g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f - g, \psi_k)^2. \text{ Вы-}$$

читая эти равенства, и учитывая, что

$$\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 = 4(f, g), \quad \text{а}$$

$(f + g, \psi_k)^2 - (f - g, \psi_k)^2 = 4(f, \psi_k) \cdot (g, \psi_k)$, получаем обобщённое равенство Парсеваля.

Пример. Элементами f пространства l_2 являются все числовые последовательности $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \infty$.

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot g_k. \quad \text{Ортонормированная система} \quad (1, 0, 0, \dots),$$

$(0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, \dots), \dots$ является замкнутой в l_2 . Коэффициенты Фурье элемента f по этой системе равны f_k . Ортогональная система $(1, 0, 0, \dots), (0, 2, 0, \dots), (0, 0, 3, 0, \dots), \dots$ не является нормированной. Система линейно независимых элементов $(1, 0, 0, \dots), (1, 1, 0, \dots), (1, 1, 1, 0, \dots), \dots$ не является ортогональной, но её легко ортогонализировать.

Пример. В пространстве действительных функций, определённых на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$, рассмотрим систему функций $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$. Эта система не является ортогональной в

смысле скалярного произведения $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$, но она полна.

Действительно, пусть некоторая функция $f(x)$ из указанного пространства орто-

гональна всем функциям $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$: $\int_a^b f(x) \cdot x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Тогда и для функции $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ имеем

$$\int_a^b F(x) \cdot x^k dx = \int_a^b F(x) \cdot d\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = 0 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, для которого всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. Для этого многочлена

$$\int_a^b F(x) \cdot P_n(x) dx = 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$\int_a^b F^2(x) dx = \int_a^b F(x)(F(x) - P_n(x)) dx \leq \varepsilon \cdot \int_a^b |F(x)| dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b F^2(x) dx}, \quad \text{откуда } \int_a^b F^2(x) dx \leq (b-a) \cdot \varepsilon^2. \quad \text{В силу}$$

произвольности ε это значит, что $F(x) = 0$, и, следовательно, $f(x) = 0$. То есть указанная система функций полна. Из доказанной полноты системы $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ следует полнота в том же пространстве любой системы многочленов степени k : $\{P_k(x)\}_{k=0}^\infty$. В частности, будет полной система многочленов, которые получаются из $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ с помощью ортогонализации.

Пример. Непрерывная на всей действительной прямой $-\infty < x < +\infty$ функция $f(x)$ называется почти периодической, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины $l(\varepsilon)$ лежит по крайней мере одно число τ , для которого $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ для всех x , $-\infty < x < +\infty$. Можно ввести скалярное произведение двух почти периодиче-

ских функций по формуле $(f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \cdot g(x) dx$. Оказывается,

в таком пространстве ни одна счётная система элементов не является полной: в нём имеется континуум попарно ортогональных векторов.

5. Важнейшей ортогональной системой функций, заданных на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$, является тригонометрическая система:

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots; \quad (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на указанном сегменте (хотя бы в несобственном смысле), то можно вычислить её коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx \text{ и}$$

составить последовательность частичных сумм ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \text{ Обычно полагают, что } f(x) \text{ оп-}$$

ределена на всей числовой прямой и 2π – периодична (тогда надо требовать $f(-\pi) = f(\pi)$). Функцию $f(x)$ можно считать интегрируемой в собственном смысле по Риману на $-\pi \leq x \leq \pi$, конечно непрерывной или даже непрерывной. Из теории рядов Фурье вытекает только лишь, что ряд Фурье такой функции сходится к ней в среднем квадратическом. Это ещё не означает, что он сходится в наперёд заданной точке, а тем более – равномерно. Поэтому нужны достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке и достаточные условия равномерной сходимости.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$, если она непрерывна на нём всюду, кроме, быть может, конечного числа точек x_i , в которых она имеет разрыв первого рода, причём в каждой точке разрыва удовлетворяет условию $f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i - 0) + f(x_i + 0))$.

Отсюда и следует, что тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной функции f сходится к ней в среднем квадратическом.

Поведение ряда Фурье функции f в некоторой фиксированной точке x_0 зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в сколь угодно малой окрестности точки x_0 . Если взять две функции, значения которых совпадают в произвольно малой окрестности точки x_0 , то как бы ни различались эти функции вне указанной окрестности, их тригонометрические ряды Фурье ведут себя в точке x_0 одинаково: либо оба сходятся к одной и той же сумме, либо оба расходятся. Следует подчеркнуть, что коэффициенты Фурье рассматриваемых двух функций могут быть совершенно различными, поскольку они определяются значениями этих функций во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$.

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, если существует такое число $G = \text{const}$, что для всех достаточно малых чисел Δx выполнено неравенство $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \leq G \cdot |\Delta x|^\alpha$.

Например, если функция f имеет в точке x_0 конечную производную, то она удовлетворяет в этой точке условию Гёльдера порядка $\alpha = 1$.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет конечной производной, но она удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha = \frac{1}{2}$ в этой точке.

Теорема. Если функция f кусочно непрерывна и 2π -периодична, а в точке x_0 удовлетворяет условию Гёльдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$.

Аналогичное утверждение справедливо даже если функция f имеет в точке x_0 разрыв первого рода, но удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0 слева и справа. В этом случае её ряд Фурье сходится к значению $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$.

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет на сегменте $[-\pi, \pi]$ условию Гёльдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, если существует такое число $G = \text{const}$, что

$$\sup_{|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]} |f(x_1) - f(x_2)| \leq G \cdot \delta^\alpha.$$

Например, если функция f имеет ограниченную на $[-\pi, \pi]$ производную, то она удовлетворяет на этом сегменте условию Гёльдера порядка $\alpha = 1$.

Теорема. Если функция f удовлетворяет на сегменте $[-\pi, \pi]$ условию Гёльдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, и $f(-\pi) = f(\pi)$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к этой функции равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Если функция f только лишь кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то на всём сегменте $[-\pi, \pi]$ она не может удовлетворять условию Гёльдера из-за наличия точек разрыва. Но если сегмент $[-\pi, \pi]$ разбит точками разрыва функции f на конечное число сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых эта функция удовлетворяет условию Гёльдера, то на любом сегменте $[a, b]$, лежащем внутри сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $(x_{i-1} < a < b < x_i)$ её тригонометрический ряд Фурье сходится к f равномерно.

В окрестности точки разрыва функции f имеется своеобразный «дефект» поведения частичных сумм ряда Фурье, называемый явлением Гиббса. Пусть, например, $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Для частичных сумм $S_n(x)$ ряда Фурье функции f найдём два числа: $A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0 - 0}} S_n(x)$ и $B = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0 + 0}} S_n(x)$. Оказывается,

что $A < f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) < B$. Геометрически это означает, что при $x \rightarrow x_0$ и $n \rightarrow \infty$ графики частичных сумм ряда Фурье приближаются не к ожидаемому вертикальному отрезку $[f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)]$, а к большему вертикальному отрезку $[A, B]$.

Следствие 1. Для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, +\pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (8.38)$$

(вытекает из теоремы 8.3).

10. Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости, основные задачи на прямую и плоскость.

Теорема. Пусть на плоскости фиксирована декартова прямоугольная система координат Oxy . Если ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к прямой l этой плоскости, то все точки прямой l удовлетворяют уравнению вида $Ax + By + C = 0$. Всякое такое уравнение определяет относительно фиксированной системы координат Oxy некоторую прямую линию ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Доказательство. Все векторы, лежащие в данной плоскости и перпендикулярные к прямой l , коллинеарны вектору $\vec{n}$. Фиксируем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ на прямой l . Для всех точек $M(x, y)$, и только для них, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ будут перпендикулярны, т.е. скалярное произведение $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$. Это значит, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ или $Ax + By + C = 0$, где $C = -(Ax_0 + By_0)$. Обратно, если хотя бы одно из чисел A, B отлично от нуля, то уравнение $Ax + By + C = 0$ имеет хотя бы одно решение $x_0 = -\frac{AC}{A^2 + B^2}$, $y_0 = -\frac{BC}{A^2 + B^2}$. Вычитая из равенства $Ax + By + C = 0$ равенство $Ax_0 + By_0 + C_0 = 0$, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, что означает перпендику-

лярность вектора $\vec{n} = (A, B)$ и любого вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где $M_0 = M_0(x_0, y_0)$, а координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$. $\square$

Теорема. Пусть в пространстве фиксирована декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Если ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен к плоскости π , то все точки плоскости π удовлетворяют уравнению вида $Ax + By + Cz + D = 0$. Всякое такое уравнение определяет относительно фиксированной системы координат $Oxyz$ некоторую плоскость ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, называется общим уравнением прямой линии на плоскости, а вектор $\vec{n} = (A, B)$ — нормальным вектором прямой. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называется общим уравнением плоскости в пространстве, а вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормальным вектором плоскости.

Сказанное означает, что кривая на плоскости является прямой линией тогда и только тогда, когда она является алгебраической кривой первого порядка. Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она является алгебраической поверхностью первого порядка. При этом выбор декартовых прямоугольных систем координат Oxu и $Oxyz$ не является существенным; можно выбрать произвольные аффинные системы координат.

Пусть L_k — линейное подпространство конечномерного линейного пространства L_m ($\dim L_k = k$, $\dim L_m = m$, $k \leq m$). Фиксируем в L_m произвольный вектор $\vec{x}_0$. Множество всех векторов $\vec{z}$ вида $\vec{z} = \vec{x}_0 + \vec{y}$, где $\vec{y} \in L_k$, называется плоскостью размерности k . Вектор $\vec{x}_0$ называется вектором сдвига, а подпространство L_k — направляющим подпространством. Любая

плоскость порождается лишь одним направляющим подпространством, но вектор сдвига определяется плоскостью неоднозначно. Однако, если в линейном пространстве L_m введено скалярное произведение, то любая плоскость имеет единственный вектор сдвига, ортогональный к направляющему подпространству. В пространстве L_m плоскость размерности $m-1$ называется гиперплоскостью. Все векторы $\vec{z}$ фиксированной гиперплоскости удовлетворяют уравнению $(\vec{n}, \vec{z} - \vec{x}_0) = 0$, где $\vec{x}_0$ — некоторый вектор сдвига направляющего подпространства L_{m-1} , а $\vec{n}$ — любой ненулевой вектор одномерного подпространства, ортогонального к L_{m-1} . Если положить $(\vec{n}, \vec{x}_0) = c$, то уравнение гиперплоскости будет иметь вид $(\vec{n}, \vec{z}) = c$. Именно такой вид имеют общие уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.

2. Уравнения прямой линии на плоскости или плоскости в пространстве можно записать и в другом виде. Пусть уравнение $Ax + By = C$ прямой l на плоскости является полным, т.е. все коэффициенты A, B, C отличны от нуля. Тогда это уравнение можно переписать в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Такое уравнение называется уравнением прямой в отрезках. Числа a и b равны величинам отрезков, которые прямая линия отсекает на осях координат. Совершенно аналогично уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ задаёт в пространстве плоскость, которая пересекает все оси координат $Oxyz$.

прямой l на плоскости. Если известно, что прямая l проходит через две несовпадающие точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$. То-

Любой ненулевой вектор, параллельный прямой линии или принадлежащий ей, называется её направляющим вектором. Пусть прямая l на плоскости проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{q} = (m, n)$, лежащий в той же плоскости. Точка $M(x, y)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$ коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$; — каноническое уравнение

прямой l на плоскости. Если известно, что прямая l проходит через две несовпадающие точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда получим уравнение прямой l на плоскости в виде $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$. В каноническом уравнении прямой линии зна-

менатели m, n могут оказаться равными нулю; тогда считают, что соответствующий числитель дроби обращается в нуль. Каноническое уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки, можно записать в виде $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0$. Совер-

шенно аналогично можно задать в пространстве плоскость. Любой ненулевой вектор, параллельный плоскости или принадлежащий ей, называется её направляющим вектором. Пусть три различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не лежат на одной прямой. Тогда векторы

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) \quad \text{не коллинеарны. Точка}$$

$M(x, y, z)$ будет лежать в одной плоскости с точками M_0, M_1, M_2 тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ компланарны, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Если имеются два направляющих вектора плоскости $\vec{q}_1 = (m_1, n_1, k_1)$ и $\vec{q}_2 = (m_2, n_2, k_2)$, которые не коллинеарны, то проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскость задаётся уравнением

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix} = 0; \quad - \text{каноническое уравнение}$$

плоскости.

Из канонического уравнения прямой на плоскости $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ можно получить её параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \text{ если в качестве параметра } t \text{ выбрать каждое из указанных равных отношений.}$$

Совершенно аналогично можно полу-

чить параметрические уравнения плоскости
$$\begin{cases} x = x_0 + um_1 + vm_2 \\ y = y_0 + un_1 + vn_2 \\ z = z_0 + uk_1 + vk_2 \end{cases},$$

где u и v – параметры. Если вектор $\overline{OM_0}$ обозначить через $\vec{r}_0$, а вектор $\overline{OM}$ – через $\vec{r}$, то параметрические уравнения плоскости означают, что $\vec{r} = \vec{r}_0 + u \cdot \vec{q}_1 + v \cdot \vec{q}_2$.

3. Прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве, можно задать при помощи направляющего вектора $\vec{q} = (m, n, k)$ каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k} \quad \text{или параметрическими уравнениями}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$$

Если две плоскости пересекаются, но не совпадают, то прямую их пересечения можно задать системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{в которой каждое уравнение задаёт}$$

соответствующую плоскость. За направляющий вектор этой прямой можно принять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ нормальных векторов плоскостей: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

В линейном пространстве L_m прямой линией является любая одномерная плоскость. Пусть $\vec{x}_0 = (x_1, \dots, x_m)$ – вектор сдвига, а $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ – ненулевой вектор одномерного направляющего подпространства. Тогда параметрическое векторное уравнение $\vec{z} = \vec{x}_0 + t\vec{q}$ задаёт прямую линию, проходящую через $\vec{x}_0$ и имеющую направляющий вектор $\vec{q}$. Если $\vec{x}_0 \neq \vec{y}_0$, то единственная пря-

мая, проходящая через $\bar{x}_0$ и y_0 , определяется уравнением $\bar{z} = \bar{x}_0 + t \cdot (\bar{y}_0 - \bar{x}_0)$. Прямую в L_m можно задать и как множество точек пересечения $m-1$ гиперплоскостей: если $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{m-1}$ – векторы, ортогональные к направляющим подпространствам $L_{m-1}^{(1)}, \dots, L_{m-1}^{(m-1)}$, то система

$$\begin{cases} (\bar{n}_1, \bar{z}) = c_1 \\ \dots\dots\dots \\ (\bar{n}_{m-1}, \bar{z}) = c_{m-1} \end{cases} \quad \text{задает пересечение } m-1 \text{ гиперплоскостей. Если это пере-}$$

сечение не пусто, т.е. система имеет хотя бы одно решение $\bar{z}_0$, то указанное пересечение является плоскостью, которую можно задать системой

$$\begin{cases} (\bar{n}_1, \bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (\bar{n}_{m-1}, \bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \end{cases}, \text{ где вектор } \bar{z} - \bar{z}_0 \text{ является произвольным вектором из}$$

$\bigcap_{i=1}^{m-1} L_{m-1}^{(i)}$. Если векторы $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{m-1}$ линейно независимы, то размерность указанного пересечения равна 1, т.е. исходная система определяет прямую в L_m .

4. Теорема. Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая l задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{k}$. Прямая l принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и $Am + Bn + Ck = 0$. Прямая l параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда $Am + Bn + Ck = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. Прямая l перпендикулярна плоскости π тогда и только тогда, когда

$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{k}$. Угол φ между прямой l и плоскостью π определяется из уравнения

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ.$$

2. Углом между прямой и плоскостью (если они не перпендикулярны) называется меньший из углов между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Если же прямая и плоскости перпендикулярны, то угол между ними считается равным $\pi/2$. Угол φ между прямой $l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ и плоскостью $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ находится как дополнительный к углу между направляющим вектором прямой $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$ и вектором нормали к плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и вычисляется согласно (22.6) по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

23. Основные задачи на прямую и плоскость

1) Найти уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ответ: $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$

2) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной данной прямой

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k}.$$

Ответ: $m \cdot (x - x_0) + n \cdot (y - y_0) + k \cdot (z - z_0) = 0.$

3) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{k}$ и через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащую на этой прямой.

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & k \end{pmatrix} = 0.$

4) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{k_1}$ и параллельной другой данной прямой

$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{k_2}$ (две данные прямые не параллельны).

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix} = 0.$

5) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум данным прямым

$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{k_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{k_2}$ (две данные прямые не параллельны).

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix} = 0.$

6) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{k_1} \text{ и перпендикулярной данной плоскости}$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ (данная прямая и данная плоскость не перпендикулярны).

$$\text{Ответ: } \det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ A & B & C \end{pmatrix} = 0.$$

7) Найти уравнение плоскости, проходящей через две данные точки

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (прямая M_0M_1 и данная плоскость не перпендикулярны).

$$\text{Ответ: } \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{pmatrix} = 0.$$

расстояние от точки до прямой (до плоскости).

Теорема 35.1. В прямоугольной декартовой системе координат Oxy расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (32.10) определяется формулой

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (35.1)$$

Доказательство. Пусть $M_0 \notin l$ (для точек $M_0 \in l$ равенство (35.1) очевидно). Опустим из точки M_0 перпендикуляр на прямую l , пусть $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра. Тогда $\overrightarrow{M_1M_0} = \alpha \mathbf{n}$ и

$$\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{M_1M_0}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{n}| = |\alpha| \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (35.2)$$

Найдем α . Так как $x_0 = x_1 + \alpha A$, $y_0 = y_1 + \alpha B$, то $Ax_0 + By_0 + C = Ax_1 + By_1 + C + \alpha(A^2 + B^2) = \alpha(A^2 + B^2)$. Отсюда $\alpha = (Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2)$. Подставив это значение α в (35.2), получим (35.1). ■

Теорема 35.2. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости (32.11) определяется формулой

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между прямыми (между плоскостями). Пусть прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) заданы уравнениями (33.1) (соответственно (33.2)).

Вообще говоря, две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) образуют два угла, в сумме равные π . Достаточно определить один из них. Так как векторы нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ перпендикулярны прямым (плоскостям), то угол $\varphi = (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ совпадает с одним из углов между прямыми l_1 и l_2 (между плоскостями π_1 и π_2). Итак, согласно (22.6) угол φ между прямыми (33.1), совпадающий с углом между их нормальными, определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

11. Алгебраические линии и поверхности второго порядка, канонические уравнения, классификация.

Если в пространстве V_3 зафиксированы точка O и базис e_1, e_2, e_3 , то говорят, что в пространстве задана *аффинная система координат* (или *общая декартова система координат*) $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. Точка O называется *началом координат*; оси, проходящие через начало координат и определенные векторами e_1, e_2, e_3 , называются *осями координат* и обозначаются Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат) соответственно. Плоскость, определяемая осями координат Ox и Oy (Ox и Oz , Oy и Oz), называется *координатной плоскостью* Oxy (Oxz , Oyz соответственно). В этой терминологии

1. Пусть Oxy – аффинная система координат на плоскости. Алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – алгебраический многочлен второй степени от переменных x, y с вещественными коэффициентами:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Общее уравнение алгебраической линии второго порядка на плоскости имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется *квадратичной частью уравнения*, группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – *линейной частью*, a_{33} – *свободным членом*.

Компактная запись общего уравнения. Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей квадратичной части. В этих обозначениях уравнение (1) примет вид

$$X^T A X + 2b^T X + a_{33} = 0, \quad A = A^T, \quad A \neq 0. \quad (2)$$

Введём матрицу $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & a_{33} \end{pmatrix}$. Числа $I_1 = \text{tr} A$,

$I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$ называются инвариантами линии второго по-

рядка, число $K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ — полуинвариантом.

Преобразование общего вида.

Пусть исходная аффинная система координат Oxy соответствует началу O и базису $e = (e_1, e_2)$. Переход к новой системе координат $O'x'y'$ означает перенос начала координат в точку $O'(\alpha, \beta)$ и преобразование базиса $eQ = e'$ с матрицей перехода Q :

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2, \quad e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2, \quad Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad \text{При}$$

этом старые координаты $X = (x, y)^T$ связаны с новыми $X' = (x', y')^T$ формулами преобразования координат $X = a + X'$, $a = (\alpha, \beta)^T$ в случае переноса координат и $X = QX'$ в случае преобразования базиса. Исследуем особенности преобразования уравнения линии в каждом из этих случаев. Пусть линия в системе координат Oxy задана уравнением (2).

Теорема. При переходе к новому базису $e' = eQ$ общее уравнение (2) преобразуется в уравнение

$$X'^T A' X' + 2b'^T X' + a_{33} = 0, \quad (3)$$

где $A' = Q^T A Q$, $b' = Q^T b$. При этом знаки инвариантов I_2 , K_3 не изменяются. В случае, когда e и e' — ортонормированные базисы, инварианты I_1 , I_2 , K_3 и полуинвариант K_2 не изменяются.

Доказательство. В уравнение (2) подставим $X = QX'$. Получим $(QX')^T A QX' + 2b^T QX' + a_{33} = 0$. Введём обозначения: $A' = Q^T A Q$, $b'^T = b^T Q$; тогда $X'^T A' X' + 2b'^T X' + a_{33} = 0$.

Докажем сначала, что знаки инвариантов I_2 , K_3 не изменяются. Для этого сделаем следующие вычисления: $A' = Q^T A Q$, $|A'| = |Q^T A Q| = |A| \cdot |Q|^2$, $I'_2 = |A'| = I_2 |Q|^2$, $|Q| \neq 0$, $\text{sign} I_2 = \text{sign} I'_2$. Таким образом, мы доказали, что знак инварианта I_2 не изменяется. Докажем теперь это для инварианта

K_3 . Для этого введём матрицу $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{Q}^T = \begin{pmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$|\tilde{Q}| = |\tilde{Q}^T| = |Q|$; тогда матрицу B' можно представить в виде

$$B' = \begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^T & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^T A Q & Q^T b \\ b^T Q & a_{33} \end{pmatrix} = \tilde{Q}^T B \tilde{Q}. \quad \text{Поэтому}$$

$$|B'| = |B| \cdot |\tilde{Q}|^2 = |B| \cdot |Q|^2. \quad \text{Следовательно, } K'_3 = K_3 |Q|^2,$$

$$\text{sign} K'_3 = \text{sign} K_3.$$

Теперь рассмотрим случай, когда базисы e и e' ортонормированные, и докажем, что знаки инвариантов I_1 , I_2 , K_3 и полуинварианта K_2 не изменяются. Так как в этом случае матрица перехода Q будет ортогональной, то $Q^T = Q^{-1}$, $Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = I$. Матрица $\tilde{Q}$ также будет ортогональной: $\tilde{Q}^T \tilde{Q} = \tilde{Q} \tilde{Q}^T = I$. Следовательно, $\tilde{Q}^T = \tilde{Q}^{-1}$, т.е. $A' = Q^{-1} A Q$. Тогда $B' = Q^{-1} B Q$, то есть матрицы A и A' , B и B' подобны. У подобных матриц следы и определители одинаковы. Так как $I_1 = \text{tr} A$, $I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$, $K_2 = a_1 - I_2$, то теорема доказана. $\square$

Теорема. При переносе начала координат в точку $O' = (\alpha, \beta)$ общее уравнение (2) преобразуется в уравнение $X'^T A X' + 2b'^T X' + a'_{33} = 0$,

где $b' = b + Aa$, $a'_{33} = a^T Aa + 2b^T a + a_{33}$, $a = (\alpha, \beta)^T$. При этом инварианты I_1, I_2, K_3 не изменяются.

Доказательство. Выразим старые координаты через новые: $X = X' + a$; подставим X в уравнение (2), в результате получим

$(X'^T + a^T)A(X' + a) + 2b^T(X' + a) + a_{33} = 0$ или, раскрывая скобки,

$$X'^T AX' + X'^T Aa + a^T AX' + a^T Aa + 2b^T X' + 2b^T a + a_{33} = 0 \quad (4)$$

Заметим, что произведение $X'^T Aa$ есть вещественное число, и его можно заменить результатом транспонирования:

$X'^T Aa = (X'^T Aa)^T = a^T A^T X' = (Aa)^T X'$. Так как $A = A^T$, то $a^T AX' = a^T A^T X' = (Aa)^T X'$. Подставляя это в уравнение (4), получим

$X'^T AX' + 2(Aa + b)^T X' + a^T Aa + 2b^T a + a_{33} = 0$. В новом уравнении квадратичная часть остаётся неизменной. Линейная часть определяется столбцом $b' = Aa + b$. Свободный член имеет вид

$a'_{33} = a^T Aa + 2b^T a + a_{33}$. Таким образом, уравнение (2) преобразуется в уравнение (3). Неизменность I_1, I_2 очевидна, так как квадратичная часть осталась неизменной. Докажем, что K_3 не изменяется.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} \\ a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12} & a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

$$a'_{33} = a_{33} + \alpha a_{13} + \beta a_{23} + \alpha(a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12}) + \beta(a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22}).$$

Так как в матрице B' третья строка есть линейная комбинация первых двух строк, то $K'_3 = |B'| = |B| = K_3$. $\square$

Теорема. Общее уравнение линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, переходом к другой прямоугольной декартовой системе координат приводится к одному из следующих типов уравнений:

- I. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_0 = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$;
- II. $\lambda_2 Y^2 + 2b_0 X = 0$, где $\lambda_2 b_0 \neq 0$;
- III. $\lambda_2 Y^2 + c_0 = 0$, где $\lambda_2 \neq 0$.

Доказательство. Пусть Oxy – прямоугольная декартова система координат и линия задана уравнением (1).

Шаг 1 (преобразование базиса). Метод вращений.

Если $a_{12} \neq 0$, то поворотом осей можно привести квадратичную часть уравнения (1) к сумме квадратов. Действительно, поворот осей на угол φ приводит к новому базису $e' = eQ$ с ортогональной

матрицей перехода $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Согласно доказанной

выше теореме $A' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$,

и, следовательно, $a'_{12} = a_{12} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi$. Чтобы получить $a'_{12} = 0$, надо сделать поворот на такой угол φ , что $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. В результате этого поворота получим уравнение $a'_{11}X'^2 + a'_{22}Y'^2 + 2a'_{13}X' + 2a'_{23}Y' + a_{33} = 0$.

Шаг 2 (перенос начала координат).

Дальнейшее упрощение основано на том, что если в уравнении содержится ненулевой квадрат какой-либо переменной, то переносом начала координат можно освободиться от этой переменной в первой степени. Действительно, если $a'_{11} \neq 0$, то

$$a'_{11}X'^2 + 2a'_{13}X' = a'_{11} \left(X'^2 + 2 \frac{a'_{13}}{a'_{11}} X' \right) = a'_{11} \left(X' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}} \right)^2 - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} =$$

$$= a'_{11}X''^2 - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}}. \text{ Если } a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \text{ то } X'' = X' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}},$$

$$Y'' = Y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}. \text{ В этом случае получаем уравнение}$$

$$a'_{11}X''^2 + a'_{22}Y''^2 + a'_{33} = 0, \quad a'_{11}a'_{22} \neq 0,$$

$$a'_{33} = a_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}}, \text{ т.е. уравнение первого типа.}$$

Пусть один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} равен нулю. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$, то переносом начала координат получаем

$$X'' = X', \quad Y'' = Y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, \text{ и уравнение будет выглядеть так:}$$

$$a'_{22}Y''^2 + 2a'_{13}X'' + a'_{33} = 0, \quad a'_{22} \neq 0, \quad a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a'_{22}}. \quad \text{Это}$$

уравнение второго типа. Но если $a'_{13} = 0$, то получаем уравнение

$$\text{третьего типа. Если же } a'_{13} \neq 0, \text{ то } X''' = X'' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}}, \quad Y''' = Y'', \text{ и}$$

уравнение будет иметь вид $a'_{22}Y'''^2 + 2a'_{13}X''' = 0$, $a'_{22}a'_{13} \neq 0$; это уравнение второго типа. Случай $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} = 0$ рассматривается аналогично.

$$\text{Для уравнения первого типа} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 \neq 0,$$

$$\text{Для уравнения второго типа} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = 0, \quad K_3 \neq 0,$$

$$\text{Для уравнения третьего типа} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = 0, \quad K_3 = 0.$$

Эти три случая взаимно исключают друг друга. Общее уравнение приводится только к одному из указанных типов. При этом

$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $I_2 = \lambda_1 \lambda_2$, где λ_1, λ_2 являются корнями уравнения $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$. $\square$

2. Классификация линий второго порядка. Канонические уравнения.

Теорема. Общее уравнение (1) линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, определяет одну и только одну из девяти линий. Для каждой из них существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет канонический вид:

1. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$ эллипс;
2. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ мнимый эллипс;
3. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ пара мнимых пересекающихся прямых;
4. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ гипербола;
5. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ пара пересекающихся прямых;
6. $Y^2 = 2pX, \quad p > 0$ парабола;
7. $Y^2 = a^2, \quad a \neq 0$ пара параллельных прямых;
8. $Y^2 = -a^2, \quad a \neq 0$ пара мнимых параллельных прямых;
9. $Y^2 = 0$ пара совпадающих прямых;

Доказательство. Пусть общее уравнение (1) переходом к новой прямоугольной декартовой системе координат преобразовалось в приведённое уравнение. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $I_2 \neq 0$, то имеем уравнение первого типа:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0, \quad I_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2, \\ K_3 = \lambda_1 \lambda_2 a_0. \text{ Тогда получаем случаи 1-5.}$$

1. Если $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0 < 0$, т.е. $I_2 > 0$, $I_1 K_3 < 0$, то $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$, — эллипс; $a^2 = -\frac{a_0}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{a_0}{\lambda_2}$.

2. Если, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0 > 0$, т.е. $I_2 > 0$, $I_1 K_3 > 0$, то $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс. На плоскости нет точек, удовлетворяющих этому уравнению.

3. Если $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $a_0 = 0$, т.е. $I_2 > 0$, $K_3 = 0$, то $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых. Только начало координат $X = Y = 0$ удовлетворяет этому уравнению.

4. Если $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $a_0 \neq 0$, т.е. $I_2 < 0$, $K_3 \neq 0$, то $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ — гипербола.

5. Если $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $a_0 = 0$, т.е. $I_2 < 0$, $K_3 = 0$, то $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых.

6. Если $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$, то $\lambda_2 Y^2 + 2b_0 X = 0$, $\lambda_2 b_0 \neq 0$, $I_1 = \lambda_2$, $I_2 = 0$, $K_3 = -\lambda_2 b_0^2 \neq 0$, $Y^2 = 2pX$, $p = -\frac{b_0}{\lambda_2}$, $p > 0$, — парабола.

Если же $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, то исходное уравнение преобразуется в уравнение $\lambda_2 Y^2 + c_0 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. При этом полуинвариант K_2 не изменяется при параллельном переносе.

7. Если $\lambda_2 c_0 < 0$, то $K_2 < 0$, $Y = \pm \frac{c_0}{\lambda_2}$ – пара параллельных прямых.

8. Если $\lambda_2 c_0 > 0$, то $K_2 > 0$, $Y^2 = -\frac{c_0}{\lambda_2}$. На плоскости нет точек, удовлетворяющих этому уравнению.

9. Если $c_0 = 0$, то $K_2 = 0$, $Y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых. $\square$

Замечание. В прямоугольной декартовой системе координат каноническое уравнение линии можно найти по инвариантам: из уравнения $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$ находим λ_1, λ_2 и, если $\lambda_1 \leq \lambda_2$, то полагаем $a_0 = \frac{K_3}{I_2}$, $b_0^2 = -\frac{K_3}{I_1}$, $c_0 = \frac{K_2}{I_1}$.

Общее уравнение. Под общим уравнением алгебраической поверхности второго порядка в системе координат $Oxyz$ пространства понимают уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (106.1)$$

где не все коэффициенты a_{ij} ($i, j = \overline{1, 3}$) равны нулю, $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = \overline{1, 3}$). Группа членов второго порядка образует здесь квадратичную форму от переменных x, y, z (или, в векторной терминологии, от радиус-вектора точки (x, y, z)), а группа линейных членов – линейную форму, так что уравнение (106.1) является уравнением гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве V_3 . Обозначения, соответствующие общей теории гиперповерхностей, в данном случае имеют вид: $X = (x, y, z)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях общее уравнение (106.1) может быть записано в компактной форме:

$$X^T A X + 2b^T X + c = 0, \quad A = A^T. \quad (106.2)$$

Приведенные уравнения. Пусть общее уравнение (106.1) задано в прямоугольной декартовой системе координат. Согласно общей теории гиперповерхностей (§105) уравнение (106.1) с помощью ортогонального преобразования координат (т.е. простым вращением и простым отражением) и параллельного переноса (т.е. переноса начала) приводится к одному и только одному из двух типов приведенных уравнений (105.6) и (105.7). В соответствии с общей схемой классификации гиперповерхностей эти уравнения можно разбить на следующие пять простейших уравнений в зависимости от значения $r = \text{rg } A$.

1. При $r = 3$:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0. \quad (106.3)$$

2. При $r = 2$:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_0 z = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 b_0 \neq 0 \quad (106.4)$$

или

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c_0 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0. \quad (106.5)$$

3. При $r = 1$:

$$\lambda_1 x^2 + 2p_0 y = 0, \quad \lambda_1 p_0 \neq 0 \quad (106.6)$$

или

$$\lambda_1 x^2 + q_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0. \quad (106.7)$$

$$I_1 = 0, \quad I_2 \neq 0.$$

(106.7)

Отметим, что все коэффициенты уравнений (106.3)–(106.7) определены однозначно общими инвариантами гиперповерхностей: $I_1 = \text{tr } A$, $I_3 = \det A$, $K_4 = \det B$ и специальными инвариантами алгебраической поверхности второго порядка: I_2 – сумма главных миноров второго порядка матрицы A и K_2 , K_3 – суммы главных миноров второго и третьего порядков матрицы B .

Величины I_2 , K_2 , K_3 – инварианты ортогонального преобразования координат, так как являются коэффициентами характеристических многочленов матриц A , B (докажите!). Однако при параллельном переносе величина K_3 остается неизменной, только если $I_2 = I_3 = K_4 = 0$, а число K_2 – если $I_2 = I_3 = K_3 = K_4 = 0$. В этом несложно убедиться непосредственно аналогично тому, как это было сделано для линии второго порядка (теорема 58.2).

Для уравнений (106.3)–(106.7) легко вычислить все инварианты, а именно:

$$(106.3): I_3 \neq 0;$$

$$(106.4): I_3 = 0, K_4 \neq 0;$$

$$(106.5): I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 \neq 0;$$

$$(106.6): I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 \neq 0;$$

$$(106.7): I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 = 0, I_1 \neq 0.$$

Эти условия необходимы и достаточны для каждого из перечисленных уравнений, так как взаимно исключают друг друга. При этом все коэффициенты уравнений определены однозначно, ибо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического уравнения: $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$;

$$a_0 = \frac{K_4}{I_3}; b_0 = \left(-\frac{K_4}{I_2}\right)^{1/2}; c_0 = \frac{K_3}{I_2}; p_0 = \left(-\frac{K_3}{I_1}\right)^{1/2}; q_0 = \frac{K_2}{I_1}.$$

Канонические уравнения.

Теорема 106.1. *Для любой алгебраической поверхности второго порядка существует прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов:*

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{эллипсоид};$$

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \text{мнимый эллипсоид};$$

- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, *вырожденный эллипсоид;*
- 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, *однополостный гиперболоид;*
- 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, *двуполостный гиперболоид;*
- 6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, *конус;*
- 7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$, *эллиптический параболоид;*
- 8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, *гиперболический параболоид;*
- 9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *эллиптический цилиндр;*
- 10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, *мнимый эллиптический цилиндр;*
- 11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *гиперболический цилиндр;*
- 12) $y^2 = 2px \ (p > 0)$, *параболический цилиндр;*
- 13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, *пара пересекающихся плоскостей;*
- 14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, *пара мнимых пересекающихся плоскостей;*

- 15) $y^2 = a^2$ ($a > 0$), пара параллельных плоскостей;
 16) $y^2 = -a^2$ ($a > 0$), пара мнимых параллельных плоскостей;
 17) $y^2 = 0$, пара совпадающих плоскостей.

Доказательство. Будем исходить из уравнений (106.3)–(106.7). Рассмотрим уравнение (106.3). В зависимости от сочетаний знаков $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a_0$ оно может быть записано по-разному.

1. Пусть знаки чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ совпадают. При этом:

а) если $a_0\lambda_1 < 0$, то уравнение (106.3) может быть записано как уравнение 1, где $a^2 = -a_0/\lambda_1, b^2 = -a_0/\lambda_2, c^2 = -a_0/\lambda_3$;

б) если $a_0\lambda_1 > 0$ – как уравнение 2;

в) если $a_0 = 0$ – как уравнение 3.

2. Пусть знаки чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не совпадают. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. При этом уравнение (106.3) может быть записано как уравнение 4 (если $a_0\lambda_3 > 0$), как уравнение 5 (если $a_0\lambda_3 < 0$) и как уравнение 6 (если $a_0 = 0$).

Аналогично уравнение (106.4) в зависимости от знаков λ_1, λ_2 может быть записано (после возможных перенумераций неизвестных и изменения направления одной из осей координат) как уравнение 7 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0$) и как уравнение 8 (если $\lambda_1\lambda_2 < 0$).

Уравнение (106.5) может быть записано как уравнение 9 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0, c_0\lambda_1 < 0$), как уравнение 10 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0, c_0\lambda_1 > 0$), как уравнение 14 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0, c_0 = 0$), как уравнение 11 (если $\lambda_1\lambda_2 < 0, c_0 \neq 0$) и как уравнение 13 (если $\lambda_1\lambda_2 < 0, c_0 = 0$).

Уравнение (106.6) после стандартных преобразований может быть записано как уравнение 12.

Уравнение (106.7) может быть записано как уравнение 15 (если $q_0\lambda_1 < 0$), как уравнение 16 (если $q_0\lambda_1 > 0$) и как уравнение 17 (если $q_0 = 0$).

Таким образом, уравнениями 1–17 исчерпываются все поверхности второго порядка. ■

12. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.

1. Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы, b_i — свободные члены, x_i — неизвестные величины.

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ называется решением системы, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если имеет более одного решения.

Компактная запись. Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде $Ax = b$, где $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ – основная матрица системы, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in R^m$ – столбец свободных членов, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – столбец неизвестных. То же самое можно записать в виде $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$, где a_i – столбцы матрицы A , $i = 1, \dots, n$.

Эквивалентность систем. Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются

эквивалентными, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема. Умножение обеих частей системы $Ax = b$ слева на невырожденную матрицу приводит её к эквивалентной системе.

Доказательство. Пусть $Q \in R^{m \times m}$, $|Q| \neq 0$. Рассматриваемые системы имеют вид

$Ax = b$ (1), $QAx = Qb$ (2). Если c – решение системы (1), то $Ac = b$. Следовательно, $QAc = Qb$, т.е. c – решение системы (2).

Если c – решение системы (2), то $QAc = Qb$, $Q^{-1}QAc = Q^{-1}Qb$. Следовательно, $Ac = b$. $\square$

2. Системы с квадратной невырожденной матрицей.

Теорема. Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.

Доказательство. $Ax = b$. Так как A – невырожденная матрица, то существует A^{-1} . Тогда $x = A^{-1}b$, т.е. решение системы существует. Допустим, есть другое решение y ; тогда $Ax = Ay$, $A^{-1}Ax = A^{-1}Ay$. Следовательно, $x = y$. $\square$

Правило Крамера.

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \hat{A}b; \quad x_i = \frac{A_{i1}b_1 + A_{i2}b_2 + \dots + A_{in}b_n}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $\hat{A}$ – матрица, присоединённая к матрице A : $\hat{A}$ составлена из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A и

транспонирована. $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$, где A_i получается из матрицы A заменой её i -го столбца столбцом свободных членов.

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n -го порядка называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$.

Миноры и алгебраические дополнения. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \min(m, n)$. Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ соответственно. Элементы матрицы A , стоящие

на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка. Определитель этой матрицы называется **минором** k -го порядка матрицы A , расположенным в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$. Для обозначения миноров приняты символы $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$, $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{(i_1 i_2 \dots i_k)}$, M_k , M . Итак,

$$M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица n -го порядка и $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ — ее минор. Если вычеркнуть в матрице A строки и столбцы, в которых расположен заданный минор, то оставшиеся элемен-

ты матрицы A образуют квадратную матрицу $(n - k)$ -го порядка. Определитель этой матрицы называется *дополнительным минором к минору* $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$. Дополнительный минор обозначается символами $\overline{M}_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$, $\overline{M}$, M^σ . Очевидно, что исходный минор является дополни-

Предположим, что хотя бы один из элементов a_{ij} матрицы A отличен от нуля. Тогда найдется такое целое положительное число r , что будут выполнены следующие два условия: 1) у матрицы A имеется минор r -го порядка, отличный от нуля, 2) всякий минор $(r + 1)$ -го и более высокого порядка (если таковые существуют) равен нулю.

Число r , удовлетворяющее требованиям 1) и 2), назовем *рангом* матрицы A ²⁾. Тот минор r -го порядка, который отличен от нуля, назовем *базисным минором* (конечно, у матрицы A может быть несколько

3. Системы общего вида. Рассмотрим систему уравнений $Ax = b$, $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$. Пусть $B = (A|b)$ — расширенная матрица этой системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы A равен рангу расширенной матрицы B .

Доказательство. Необходимость. $Ax = b$ совместна, следовательно, существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$, что $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$. Это означает, что столбец b является линейной комбинацией столбцов $a_1, a_2, \dots, a_n$ матрицы A . Поэтому $\text{rang} A = \text{rang} B$.

Достаточность. Пусть $\text{rang} A = \text{rang} B = r$. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\text{rang} B = r$, то он же будет базисным минором и матрицы B . Следовательно, последний

столбец матрицы B будет линейной комбинацией столбцов матрицы A . Коэффициенты этой линейной комбинации являются решением системы $Ax = b$, т.е. система совместна. $\square$

Пусть система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mr}x_r + a_{m(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

совместна и $\text{rang} A = \text{rang} B = r$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в

левом верхнем углу: $M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$. Рассмотрим укорочен-

НУЮ СИСТЕМУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \quad (4)$$

[illegible]

с квадратной невырожденной матрицей. Эта система имеет единственное решение $c_1, c_2, \dots, c_r$. Очевидно, совокупность $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ является решением системы (4).

Теорема. Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных, из системы (5) можно получить все решения системы (4).

Доказательство. Пусть $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ — произвольное решение (4). Покажем, что оно может быть получено указанным путём. Возьмем числа $c_{r+1}, \dots, c_n$ в качестве значений свободных неизвестных $x_{r+1}, \dots, x_n$ и будем вычислять значения главных неизвестных из системы (5). Так как $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ — решение системы (4), то $(c_1, \dots, c_r)$ — решение системы (5). Так как система (5) имеет единственное решение, то в качестве решения можем получить только $(c_1, \dots, c_r)$. $\square$

Теорема. Система алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\text{rang} A = \text{rang} B = n$.

Доказательство. Теорема фактически содержится в описанном выше правиле получения решения системы. Если $\text{rang} A = \text{rang} B < n$, то среди неизвестных будет хотя бы одно свободное неизвестное. Тогда получим бесконечно много решений. $\square$

□

Общее решение. Решим систему (5) относительно главных неизвестных: $x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n)$, где $f_1, \dots, f_r$ — однозначно определенные функции. Эти соотношения при произвольных $x_{r+1}, \dots, x_n$ описывают множество всех решений системы (3) и называются общим решением системы (3).

Однородная система. Система уравнений $Ax = 0$ всегда совместна: она имеет тривиальное решение $x = 0$.

Теорема. Однородная система $Ax = 0$ с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\text{rang} A < n$.

Теорема. Однородная система $Ax = 0$ с квадратной матрицей A имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

13. Линейный оператор в конечномерном пространстве, его матрица. Норма линейного оператора.

1. Рассмотрим множество V элементов $x, y, z, \dots$ и поле P действительных или комплексных чисел. Пусть в V введены две операции: сложение его элементов и умножение его элементов на числа из P . Это значит, что для любых $x, y \in V$ определён элемент $z = x + y \in V$, а для любых $x \in V$, $\lambda \in P$ определён элемент $y = \lambda \cdot x \in V$. Пусть введённые две операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
4. для любого $x \in V$ существует такой элемент $(-x) \in V$, что $x + (-x) = 0$;
5. $1 \cdot x = x$, $1 \in P$;
6. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, $\lambda \in P$;
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, $\lambda, \mu \in P$;
8. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Тогда V называется линейным пространством над полем P . Если P – поле действительных чисел, то V – действительное линейное пространство; если P – поле комплексных чисел, то V – комплексное линейное пространство. Максимальное число линейно независимых векторов пространства V называется его размерностью. Если размерность пространства V конечна, то оно называется конечномерным.

Пусть V и W – линейные пространства над общим полем P . Отображение $A: V \rightarrow W$ называется линейным отображением пространства V в пространство W , если для любых $x, y \in V$ и

любого числа $\alpha \in P$ выполняются равенства $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Линейное отображение называется также линейным оператором, действующим из пространства V в пространство W ; $A \in L(V, W)$.

Операторы A и B , действующие из V в W называются равными, если $Ax = Bx$ для любого $x \in V$.

Отображение $O: V \rightarrow W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $0 \in W$, является линейным и называется нулевым оператором.

Отображение $I: V \rightarrow V$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в x является линейным и называется тождественным оператором.

Свойства линейных операторов.

1. Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой.
2. Линейный оператор сохраняет линейную комбинацию:

$$A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i Ax_i.$$

3. Линейный оператор сохраняет линейную зависимость, т.е. линейно зависимую систему векторов переводит в линейно зависимую.

Задание линейного оператора. Для задания линейного оператора $A: V \rightarrow W$ достаточно определить его только на векторах $e_1, e_2, \dots, e_n$ некоторого базиса пространства V . Зная $Ae_i, i = 1, 2, \dots, n$, можно однозначно найти образ любого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$: $Ax = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in W$.

Теорема. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства V , а $g_1, g_2, \dots, g_n$ – произвольные векторы пространства W . Тогда существует, и притом единственный, линейный оператор $A: V \rightarrow W$, который переводит векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ в векторы $g_1, g_2, \dots, g_n$ соответственно.

Доказательство. Построим искомый оператор по правилу: если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$, то $Ax = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in W$. Из единственности разложения вектора x по базису следует, что правило однозначно определяет образ вектора x ; при этом $Ae_i = g_i$. Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор A единствен, так как если B – любой другой оператор, удовлетворяющий условию теоремы, то $Bx = \sum_{i=1}^n B(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i g_i = Ax$ для любого $x \in V$. $\square$

Следствие. Линейные операторы A и B , действующие из V в W , равны тогда и только тогда, когда они совпадают на векторах базиса V .

2. **Матрица линейного оператора.** Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ – базисы конечномерных пространств V и W . Линейный оператор $A: V \rightarrow W$ однозначно определяется заданием векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$. В свою очередь $Ae_i, i = 1, 2, \dots, n$, однозначно определяются своими координатами в базисе f :

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + \dots + a_{m2}f_m \\ \dots\dots\dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + \dots + a_{mn}f_m. \end{cases}$$

$$A_{fe} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей оператора } A \text{ в паре}$$

базисов e и f . Из единственности разложения вектора по базису следует, что при фиксированных e и f матрица линейного оператора определена однозначно.

Теорема. Пусть $\dim V = n, \dim W = m$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами, действующими из V в W и матрицами $P^{m \times n}$.

Доказательство. Построим это соответствие. зафиксируем базисы $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ пространств V и W . Поставим в соответствие каждому линейному оператору $A: V \rightarrow W$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f . Очевидно, что матрица $A_{fe} \in P^{m \times n}$ определена однозначно. Докажем биективность построенного таким образом отображения. Отображение $y = F(x)$ называется биективным (взаимно однозначным), если оно

инъективно, т.е. из $x_1 \neq x_2$ следует $F(x_1) \neq F(x_2)$, и сюръективно, т.е. для любого y уравнение $y = F(x)$ имеет хотя бы одно решение x . Рассматриваемое отображение операторов на матрицы сюръективно, так как любая матрица $B = (b_{ij}) \in P^{m \times n}$ является матрицей линейного оператора, действующего из V в W и переводящего векторы e_j в векторы $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$, $j = 1, \dots, n$. Рассматриваемое отображение инъективно, так как различные операторы, действующие из V в W , не совпадают на базисных векторах, а значит имеют разные матрицы. $\square$

Теорема. Если $y = Ax$, то $y_f = A_{fe} x_e$.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$, $A_{fe} = (a_{ij})$.

Утверждение $y_f = A_{fe} x_e$ равносильно соотношениям

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = 1, \dots, m. \text{ Докажем их: } y = Ax =$$

$$= A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A e_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i. \square$$

Матрицы оператора в различных базисах. Пусть e и $t = eC$ – два базиса пространства V с матрицей перехода C , f и $s = fD$ – два базиса пространства W с матрицей перехода D . Одному и тому же линейному оператору A , действующему из V в W , в паре базисов e и f соответствует матрица A_{fe} , а в паре базисов t и s – матрица A_{st} .

Теорема. Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора A , действующего из V в W , в различных парах базисов связаны соотношением $A_{st} = D^{-1} A_{fe} C$.

Доказательство. Для любого $x \in V$ и $y = Ax$ имеем
 $y_f = A_{fe}x_e, \quad y_s = A_{st}x_t, \quad x_e = Cx_t, \quad y_f = Dy_s,$
 $Dy_s = A_{fe}Cx_t, \quad DA_{st}x_t = A_{fe}Cx_t, \quad DA_{st} = A_{fe}C,$
 $A_{st} = D^{-1}A_{fe}C. \quad \square$

Следствие 1. Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны.

Следствие 2. Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.

Теорема. Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора, действующего из V в W , где $\dim V = n, \dim W = m$.

Доказательство.

Необходимость.

$A, B \in P^{m \times n}, \quad B = D^{-1}AC$. Рассмотрим произвольные линейные пространства V и W над полем P , $\dim V = n, \dim W = m$. Возьмем в пространстве V базис e , в W – базис f . В силу взаимно однозначного соответствия между матрицами $P^{m \times n}$ и операторами, действующими из V в W , существует единственный оператор A , действующий из V в W , который в паре базисов e и f имеет матрицу A_{fe} , а в паре базисов t и s – матрицу A_{st} . Здесь $t = eC, s = fD$.

Достаточность уже была доказана выше. $\square$

3. Линейное пространство операторов. Суммой линейных операторов $A, B \in L(V, W)$ называется отображение C , действующее из V в W , по правилу $Cx = Ax + Bx$.

Произведением линейного оператора $A \in L(V, W)$ на число $\alpha \in P$ называется отображение C , действующее по правилу $Cx = (\alpha A)x = \alpha(Ax)$.

Теорема. Для любых операторов $A, B \in L(V, W)$ и числа $\alpha \in P$ $A + B \in L(V, W)$, $\alpha A \in L(V, W)$.

Доказательство. Для любых $x, y \in V$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}(A + B)(x + y) &= A(x + y) + B(x + y) = Ax + Ay + Bx + By = \\ &= (Ax + Bx) + (Ay + By) = (A + B)x + (A + B)y.\end{aligned}$$

Аналогично для αA . $\square$

4. Умножение линейных операторов. Пусть V, W, Z – линейные пространства над полем P . Произведением линейных операторов $A \in L(V, W)$ и $B \in L(W, Z)$ называется такой оператор $C \in L(V, Z)$, $C = BA$, что $Cx = (BA)x = B(Ax)$ для любого $x \in V$.

Теорема. Если $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, Z)$, то $BA \in L(V, Z)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(BA)(x + y) &= B(A(x + y)) = B(Ax + Ay) = B(Ax) + B(Ay) = \\ &= BAx + BAy.\end{aligned}$$

$$(BA)(\alpha x) = B(A(\alpha x)) = B(\alpha Ax) = \alpha(B(Ax)) = \alpha(BAx). \quad \square$$

Свойства.

1. $(AB)C = A(BC)$.
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
3. $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.

Теорема. При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы в V, W, Z , то

$$(BA)_{ge} = B_{gf} A_{fe}.$$

Доказательство. $A_{fe} = (a_{ij}), \quad B_{gf} = (b_{ij}),$
 $(BA)_{ge} = (c_{ij}), \quad \dim V = n, \quad \dim W = m, \quad \dim Z = k.$

$$\begin{aligned} B A e_j &= \sum_{i=1}^k c_{ij} g_i = B(A e_j) = B\left(\sum_{s=1}^m a_{sj} f_s\right) = \sum_{s=1}^m a_{sj} B f_s = \\ &= \sum_{s=1}^m a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is} g_i = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^k a_{sj} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}\right) g_i. \quad \square \end{aligned}$$

5. Образ и ядро линейного оператора. Образом оператора $A \in L(V, W)$ называется множество

$\operatorname{im} A = \{y \in W \mid \exists x \in V : y = Ax\},$ ядром —

$\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}.$

Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а *дефектом* — размерность ядра. Обозначения: $\operatorname{rg} A, \operatorname{def} A$. Итак, $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} A, \operatorname{def} A = \dim \ker A$.

Теорема 80.2. Если $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V , то

$$\operatorname{im} A = \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n). \quad (80.1)$$

Доказательство. Достаточно показать, что для множеств (80.1) имеет место двустороннее вложение: с одной стороны, если $y \in \operatorname{im} A$, то $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in V$, т.е. $y = A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n)$; с другой стороны, если $y \in \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n)$, то $y = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i = A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = Ax$, где $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, т.е. $y \in \operatorname{im} A$. ■

Теорема 80.4 (о ранге и дефекте). Если $A \in L(V, W)$, то

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{def} A = \dim V. \quad (80.2)$$

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис $\ker A$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V . Согласно теореме 80.2, $\operatorname{im} A = \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = \mathcal{L}(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$. Докажем, что векторы $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеют место соотношения $\alpha_{k+1}Ae_{k+1} + \dots + \alpha_nAe_n = \theta$ или $A(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_ne_n) = \theta$. Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_ne_n \in \ker A$. Это означает, что вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_ne_n$ линейно выражается через $e_1, \dots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$. Таким образом, $\dim \operatorname{im} A = n - k$, $\dim \ker A = k$. Отсюда следует (80.2). ■

6. Норма линейного оператора.

Пусть V – линейное пространство над полем P . Нормой в линейном пространстве V называется отображение $\|\cdot\|: V \rightarrow R$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ действительное число $\|x\| \in R$ и удовлетворяющее аксиомам: для любых $x, y \in V$, $\alpha \in P$

1. $\|x\| \geq 0$, причем норма равна нулю только если $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство V с заданной на нём нормой $\|\cdot\|$ называется линейным нормированным пространством. Число $\|x\|$ называется нормой вектора x .

Примеры.

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ называется расстоянием между x и y .

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в линейном пространстве V называются эквивалентными, если существуют такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что для любого $x \in V$

$$\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1.$$

Теорема. В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.

Доказательство. Выберем в пространстве V произвольный базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ и введем скалярное произведение согласно (70.7). Тогда V – евклидово (унитарное) пространство и в нем можно рассматривать евклидову норму (107.1). Так как в этом скалярном произведении e – ортонормированный базис, то $\|x\|_E = |x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$. Покажем, что любая норма $\|\cdot\|$ в линейном пространстве V эквивалентна евклидовой норме $\|\cdot\|_E$. Тем самым теорема будет доказана.

1. Докажем сначала существование числа $c_1 > 0$ такого, что для любого вектора $x \in V$

$$\|x\| \leq c_1 \|x\|_E. \quad (107.3)$$

Пусть $x \in V$ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Тогда $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|$ и в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\|x\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{1/2} = c_1 \|x\|_E, \text{ где } c_1 = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{1/2} > 0.$$

2. Докажем теперь существование числа $c_2 > 0$ такого, что для любого вектора $x \in V$

$$\|x\|_E \leq c_2 \|x\|. \quad (107.4)$$

а) Рассмотрим единичную сферу по норме $\|\cdot\|$: $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ и покажем, что множество координат всех векторов сферы S ограничено. Пусть это не так. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует вектор $x^{(m)}$ такой, что $\|x^{(m)}\| = 1$ и $|x_k^{(m)}| > m$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно,

$$\|x^{(m)}\|_E = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(m)}|^2 \right)^{1/2} \geq |x_k^{(m)}| > m. \quad (107.5)$$

Рассмотрим последовательность векторов

$$y^{(m)} = x^{(m)} / \|x^{(m)}\|_E. \quad (107.6)$$

Очевидно, что $\|y^{(m)}\|_E = 1$ и, значит, $y^{(m)} \in S_E(1)$. В силу утверждения 3 из последовательности $\{y^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y^{(m_j)}\}$, сходящуюся по $\|\cdot\|_E$ к вектору $a \in S_E(1)$, т.е.

$$\|y^{(m_j)} - a\|_E \rightarrow 0, \quad (107.7)$$

$$\|a\|_E = 1. \quad (107.8)$$

Из (107.7) с учетом (107.3) следует, что

$$\|y^{(m_j)} - a\| \rightarrow 0. \quad (107.9)$$

Таким образом, последовательность $\{y^{(m_j)}\}$ сходится к вектору a по норме $\|\cdot\|$.

С другой стороны, в силу (107.6), (107.5) с учетом $\|x^{(m_j)}\| = 1$

$$\|y^{(m_j)}\| = \|x^{(m_j)}\| / \|x^{(m_j)}\|_E < 1/m_j.$$

Следовательно, $\|y^{(m_j)}\| \rightarrow 0$. Отсюда и из (107.9) в силу единственности предела вытекает, что $a = \theta$, что противоречит (107.8).

Таким образом, существует число M такое, что для всех $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S$ выполняется неравенство

$$|x_i| \leq M, \quad i = \overline{1, n}. \quad (107.10)$$

6) Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ — любой вектор пространства V , тогда вектор $x/\|x\| \in S$ и для его координат имеет место неравенство (107.10). Значит, $|x_i|/\|x\| \leq M$, т.е. $|x_i| \leq M\|x\|$, $i = \overline{1, n}$, и $\|x\|_E =$

$$\sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq M\sqrt{n}\|x\| = c_2\|x\|, \text{ где } c_2 = M\sqrt{n} > 0. \blacksquare$$

Следствие. В конечномерном пространстве из сходимости по одной норме следует сходимость по любой другой норме, так как

$$\|x^{(k)} - a\|_1 \leq c_1\|x^{(k)} - a\|_2.$$

Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то $L(V, W)$ является линейным пространством размерности $n \cdot m$. В нём можно ввести норму (норму оператора $A \in L(V, W)$) произвольным образом. Но если в V и W введены нормы $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$, то операторная норма должна быть согласована с ними.

Согласованная норма оператора. Норма оператора $A \in L(V, W)$ называется согласованной с векторными нормами $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ пространств V, W , если для любого $x \in V$

$$\|Ax\|_W \leq \|A\| \cdot \|x\|_V.$$

Теорема. Любое собственное значение оператора $A \in L(V, W)$ не превосходит по абсолютной величине любую его согласованную норму.

Доказательство.

$Ax = \lambda x$, $\|Ax\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Так как для собственного вектора x $\|x\| > 0$, то $|\lambda| \leq \|A\|$. $\square$

7. Ограниченный оператор.

Оператор $A \in L(V, W)$ называется ограниченным, если единичный шар в V он переводит в ограниченное по норме пространства W множество, т.е. если существует число $C > 0$ такое, что для всех векторов $x \in V$, для которых $\|x\| \leq 1$, выполняется неравенство $\|Ax\| \leq C$. Или, что то же самое, существует такое $C > 0$, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in V$.

Теорема. В конечномерных нормированных пространствах V и W любой оператор $A \in L(V, W)$ ограничен.

что для всех векторов $x \in V$, для которых $\|x\| \leq 1$, выполняется неравенство $\|Ax\| \leq C$. Или, что то же самое, существует такое $C > 0$, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in V$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства V , и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. $\|Ax\|_W = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\|_W \leq$
 $\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A e_i\|_W \leq \left(\sum_{i=1}^n \|A e_i\|_W^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M \cdot \|x\|_E$, где $\|\cdot\|_E$ – евклидова норма в V . Из эквивалентности норм в V имеем $\|x\|_E \leq C_1 \|x\|_V$. Поэтому $\|Ax\|_W \leq C \|x\|_V$. $\square$

8. Подчиненная норма. Пусть V и W – конечномерные пространства, и $A \in L(V, W)$. A – ограниченный оператор, т.е. существует такое число $C > 0$, что $\|Ax\| \leq C \|x\|$ для любого

$x \in V$. Это значит, что $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$ для любого $x \neq 0$. Поэтому

числовое множество $\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \neq 0 \right\}$ ограничено сверху, и суще-

ствует его конечная точная верхняя грань: $\mu(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Теорема. Отображение $\mu(A)$ является нормой в пространстве $L(V, W)$.

Доказательство.

1. $\mu(A) \geq 0$ – очевидно. Если $\mu(A) = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для любого $x \in V$; тогда $A = 0$.

Выполнение других двух аксиом следует из свойств точной верхней грани. $\square$

$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ называется подчинённой нормой оператора A .

Свойства подчиненной нормы:

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ для любого $x \in V$, так как $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \mu(A) = \|A\|$.
2. Подчиненная норма – наименьшая из всех согласованных норм, так как она является точной верхней гранью множества чисел $\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \neq 0 \right\}$, тогда как любая согласованная норма – одна из верхних граней этого множества.

3. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, так как

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \cdot \|Bx\| = \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

9. Пример. Пусть $A \in L(V, V)$. Пусть в линейном пространстве V введена норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Тогда

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ является подчинённой нормой линейного оператора A . Действительно,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sup_{\|x\|_1=1} \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \sup_{\|x\|_1=1} \|x\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Если максимум в правой части достигается при $j = j_0$, то взяв в качестве x j_0 -ый нормированный к единице базисный вектор пространства V , все предыдущие неравенства мы обратим в равенства.

14. Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.

1. Сопряженный оператор.

Определение. Пусть $A \in L(V, W)$, где V и W – евклидовы (унитарные) пространства. Оператор $A^* \in L(W, V)$ называется сопряжённым к A , если $(Ax, y)_W = (x, A^*y)_V$ для любых $x \in V$, $y \in W$.

Свойства сопряжённых операторов.

1. Сопряженный оператор линеен.
2. Для любого линейного оператора существует единственный сопряженный оператор.
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$, $(AB)^* = B^* A^*$,
 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, $(A^*)^* = A$.
4. Для любого оператора
 $A \in L(V, V)$ $\det A^* = \overline{\det A}$, $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A$.
5. Для любого оператора
 $A \in L(V, V)$ $\ker A = \operatorname{im}^\perp A^*$, $\ker A^* = \operatorname{im}^\perp A$.
6. Если подпространство L инвариантно относительно оператора A , то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно A^* .

2. Нормальный оператор.

Определение. Оператор A называется нормальным, если $A \in L(V, V)$ и $AA^* = A^*A$.

Свойства нормального оператора.

1. Собственный вектор x нормального оператора, отвечающий собственному значению λ , является собственным вектором оператора A^* , отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.

матрица нормальна.

Теорема 96.1. *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ , является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Доказательство. Легко проверить, что если A – нормальный оператор, то $A - \lambda I$ также нормален. Пусть теперь x – собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению λ , тогда $(A - \lambda I)x = \theta$ и $((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) = 0$. Согласно (94.1) отсюда следует, что $(x, (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)x) = 0$ или, с учетом нормальности оператора $A - \lambda I$, что $(x, (A - \lambda I)(A - \lambda I)^*x) = 0$, т.е. $((A - \lambda I)^*x, (A - \lambda I)^*x) = 0$ и $(A - \lambda I)^*x = \theta$. Отсюда в силу теоремы 94.4 следует, что $(A^* - \bar{\lambda}I)x = \theta$, т.е. $A^*x = \bar{\lambda}x$. ■

2. $\ker A = \ker A^*$.

3. $\ker A = \operatorname{im}^\perp A, \quad \ker A^* = \operatorname{im}^\perp A^*$.

4. Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются попарно ортогональными.

5. Существует ортонормированный базис из собственных векторов нормального оператора.

6. В унитарном пространстве A и A^* имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов, если A нормален.

Теорема 96.2. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda \neq \mu$. Тогда $(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. С другой стороны, $(Ax, y) = (x, A^*y) = \{ \text{в силу теоремы 96.1} \} = (x, \bar{\mu}y) = \mu(x, y)$. Следовательно, $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ и так как $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$. ■

3. **Определение.** Линейный оператор U , действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется унитарным (ортогональным) оператором, если $U^*U = UU^* = I$.

Из определения вытекают свойства:

1. Оператор U унитарен (ортогонален) только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет унитарную (ортогональную) матрицу.

2. Для унитарного (ортогонального) оператора $|\det U| = 1$.

3. Унитарный (ортогональный) оператор нормален.

Теорема. В унитарном (евклидовом) пространстве следующие утверждения равносильны:

1. U – унитарен (ортогонален);

2. $U^*U = I$;

3. $UU^* = I$;

4. U сохраняет скалярное произведение для любых $x, y \in V$: $(Ux, Uy) = (x, y)$;

5. U сохраняет длину: для любого x $|Ux| = |x|$;

6. U переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.

7. U переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Доказательство.

1. $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

Переходы $1 \Rightarrow 2$ и $1 \Rightarrow 3$ очевидны.

Из $U^*U = I$ следует, что U – обратимый оператор. Тогда из равенства $U^*UU^{-1} = U^{-1}$ получаем $U^* = U^{-1}$. Этим доказано $2 \Rightarrow 1$.

Аналогично $3 \Rightarrow 1$.

$$2. \quad 1 \Rightarrow 4: U^*U = I \Rightarrow (Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y).$$

$$4 \Rightarrow 1: (x, U^*Uy) = (Ux, Uy) = (x, y) \Rightarrow U^*U = I.$$

$$3. \quad 4 \Rightarrow 5: |Ux| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, y)} = |x|.$$

5 $\Rightarrow$ 4: в евклидовом пространстве

$$(x, y) = (|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2) / 2, \text{ а}$$

в унитарном пространстве

$$(x, y) = (|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2) / 4.$$

$$4. \quad 4 \Rightarrow 6: (Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

$$6 \Rightarrow 4: \text{ если } \{e_i\} - \text{ ортонормированный базис, то } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

$$Ux = \sum_{i=1}^n x_i Ue_i, \quad Uy = \sum_{i=1}^n y_i Ue_i. \quad \{Ue_i\} - \text{ ортонормированный базис по условию 6, тогда}$$

$$(Ux, Uy) = \left(\sum_{i=1}^n x_i Ue_i, \sum_{i=1}^n y_i Ue_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x, y).$$

5. $6 \Rightarrow 7$ очевидно.

$7 \Rightarrow 6$ доказано в 4. $\square$

Следствие. Унитарный (ортогональный) оператор на любом инвариантном подпространстве индуцирует унитарный (ортогональный) оператор (так как он сохраняет скалярное произведение).

Теорема. Нормальный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны 1.

Доказательство. Необходимость. $Ux = \lambda x$,

$$(Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 (x, x) = (x, x) \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

Достаточность. Существует ортонормированный базис из собственных векторов $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, следовательно для любого

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V \quad Ux = \sum_{i=1}^n x_i Ue_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i. \quad (x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2,$$

$$(Ux, Ux) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = (x, x). \square$$

Теорема. Если подпространство L инвариантно относительно унитарного (ортогонального) оператора U , то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно U .

Доказательство. $U|_L$ – обратимый оператор, и его образ совпадает со всем L : $im U|_L = L$. Поэтому для любого $x \in L$ существует такой вектор $x_1 \in L$, что $x = Ux_1$. Тогда $(x, Uy) = (Ux_1, Uy) = (x_1, y) = 0$. А это и означает $Uy \in L^\perp$. $\square$

4. Каноническая форма матрицы унитарного оператора.
Из того, что унитарный оператор нормален и все его собственные значения по модулю равны единице, следует, что в пространстве V существует ортонормированный базис $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, в котором матрица унитарного оператора U имеет диагональную форму:

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матричная формулировка: квадратная комплексная матрица унитарна тогда и только тогда, когда она унитарно подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы по модулю равны единице.

Каноническая форма матрицы ортогонального оператора. Пусть Q – ортогональный оператор, действующий в евклидовом пространстве. Для собственного значения λ и $\det Q$ выполнено $\lambda = \pm 1$, $\det Q = \pm 1$.

В любом ортонормированном базисе e оператор Q имеет ортогональную матрицу Q_e , т.е. $Q_e^{-1} = Q_e^T$.

Примеры. 1. В одномерном пространстве матрица Q_e ортогонального оператора Q имеет вид $Q_e = [\pm 1]$ (1). Либо $Q_e = I$, либо $Q_e = -I$.

2. В двумерном пространстве матрица Q_e ортогонального

оператора Q имеет вид $Q_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, причем

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot \pm \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

а). Если $\det Q = 1$, то из $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ получаем

$$Q_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha = \cos \varphi, \quad \beta = -\sin \varphi,$$

$$Q_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

б). Если $\det Q = -1$, то из $\begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ полу-

чаем $Q_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$. При этом

$f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I) = \lambda^2 - 1$, $\lambda = \pm 1$. Следовательно, существует ортонормированный базис f из собственных векторов, в котором матрица оператора Q имеет вид

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Теорема. Для любого ортогонального оператора Q в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис e , в котором его матрица имеет квазидиагональную форму с клетками вида (1) или (2) на главной диагонали.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности n пространства V . Для $n = 1, 2$ утверждения вытекают из (1) и (2), (3). Пусть $n \geq 3$ и теорема верна для ортогональных операторов в пространствах размерности $k \leq n - 1$. Докажем теорему для размерно-

Матрица Q_e называется канонической формой матрицы ортогонального оператора.

Матрица (97.8) называется *канонической формой матрицы ортогонального оператора*.

вида

Простым отражением называется оператор в евклидовом пространстве, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу вида

Из определения следует, что простое вращение и простое отражение – ортогональные операторы, так как их матрицы (97.9) и (97.10) в ортонормированном базисе ортогональны. Простое вращение представляет собой поворот в некоторой двумерной плоскости и оставляет неизменным $(n - 2)$ -мерное подпространство, ортогональное этой плоскости. Простое отражение меняет направление всех векторов некоторого одномерного подпространства и оставляет неизменным его $(n - 1)$ -мерное ортогональное дополнение.

Это утверждение следует из того, что матрица вида (97.8) может быть представлена в виде произведения некоторого числа матриц вида (97.9), (97.10). ■

5. Теорема. У всякого линейного оператора в комплексном пространстве существует одномерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Утверждение следует из существования собственного вектора для любого оператора, действующего в комплексном пространстве: если e – собственный вектор оператора A , то $L(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно A . $\square$

Теорема. У всякого линейного оператора в вещественном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть V – вещественное пространство, $A \in L(V, V)$, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – базис V , и A – матрица опе-

5. Теорема. У всякого линейного оператора в комплексном пространстве существует одномерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Утверждение следует из существования собственного вектора для любого оператора, действующего в комплексном пространстве: если e – собственный вектор оператора A , то $L(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно A . $\square$

Теорема. У всякого линейного оператора в вещественном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть V – вещественное пространство, $A \in L(V, V)$, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – базис V , и A – матрица опе-

тема уравнений $Az = \lambda_0 z$ имеет нетривиальное комплексное решение $z_0 = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)^T$. В векторных обозначениях

$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in R^n$ система

$Az = \lambda_0 z$ может быть записана в виде

$A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$ или $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases}$. Тогда, если

$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то системе $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases}$ соответствует

система векторных уравнений $\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases}$, где u, v – век-

торы пространства V , одновременно не равные нулю. Следовательно, натянутая на u и v линейная оболочка $L(u, v)$ – инвариантное подпространство. $\dim L(u, v) = 2$.

Каждый вещественный корень характеристического многочлена порождает одномерное инвариантное пространство, а каждый комплексный корень – двумерное инвариантное подпространство. $\square$

6. **Пример.** Оператор, заданный в ортонормированном базисе матрицей

Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, то $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Следовательно, $\alpha_n x_n = 0$. Поэтому $\alpha_n = 0$. $\square$

Следствие. Линейный оператор, действующий в n -мерном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.

2. Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n \times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, $\lambda \in P$.

Теорема. Характеристический многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрицы $A \in P^{n \times n}$ является многочленом n -ой степени от переменной $\lambda \in P$.

Доказательство.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы $A - \lambda E$ представляет собой многочлен от λ степени не выше 1, значит каждый член определителя $\det(A - \lambda E)$ является многочленом от λ степени не выше n . Следовательно, $f(\lambda)$ – многочлен от λ , степень которого не превосходит n . Осталось доказать, что степень этого многочлена в точности равна n . Действительно, все члены определителя $\det(A - \lambda E)$, отличные от $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, имеют степень не больше $n-2$. Следовательно, в многочлене $f(\lambda)$ слагаемые, содержащие λ^{n-1} и λ^n , определяются только членом $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, который согласно теореме Виета имеет вид

$$(-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + g_{n-2}(\lambda).$$

Поэтому $f(\lambda) = a_0 + a_1(-\lambda) + \dots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n$. $\square$

Замечание. $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \operatorname{tr} A$.

Теорема. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Доказательство. Действительно, если $A = Q^{-1}BQ$, то $|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda IQ| = |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$. Таким образом, при любом значении λ характеристические многочлены матриц A и B принимают одинаковые значения и, следовательно, совпадают. ■

Следствие. Все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковые характеристические многочлены.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от базиса, а определяется самим оператором.

3. Характеристическим многочленом оператора называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$. Характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе.

Пусть V – линейное пространство над полем P и $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пространства V называется *инвариантным подпространством относительно оператора A* , если для любого вектора x из L его образ Ax также лежит в L .

Пример 1. Пусть

Замечание 2. Верна и теорема, обратная доказанной.

Индукированный оператор. Рассматривая линейный оператор только на его инвариантном подпространстве, можно получить новый оператор. Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $A|L : L \rightarrow L$, определенное

равенством

$$(A|L)x = Ax, \quad \forall x \in L,$$

называется *индуцированным оператором, порожденным оператором A* . В силу линейности оператора A индуцированный оператор также будет линейным. Он совпадает с оператором A на подпространстве L и не определен вне его. Итак, $A|L \in \mathcal{L}(L, L)$.

Замечание 2. И — — — — —

Теорема. Пусть $A \in L(V, V)$, $A|_W \in L(W, W)$, $A|_W$ — индуцированный оператор, порожденный оператором A . Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора.

Доказательство. Линейное подпространство $W \subset V$ называется инвариантным подпространством относительно A , если для любого $x \in W$ его образ $Ax \in W$. Выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ в V так, что его первые k векторов принадлежат инвариантному относительно A подпространству

$$W : e_1, e_2, \dots, e_k \in W. \quad \text{Тогда} \quad A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$(A_e - \lambda I) = \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \lambda I \end{pmatrix},$$

$\det(A_e - \lambda I) = \det(A_{11} - \lambda I) \cdot \det(A_{22} - \lambda I)$. Поскольку матрицей оператора $A|_W$ в выбранном базисе является A_{11} , получаем

$$\det(A|_W - \lambda I) = \det(A_{11} - \lambda I). \quad \square$$

Теорема. Если $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ — прямая сумма подпространств $W_1, W_2, \dots, W_k$, инвариантных относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора A равен произведению характеристических многочленов

$f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$

индуцированных операторов

 $A|_{W_1}, A|_{W_2}, \dots, A|_{W_k}.$

Теорема 84.2. Если пространство V является прямой суммой подпространств $L_1, \dots, L_k$, инвариантных относительно оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 84.1. В качестве искомого базиса берется базис e , составленный из базисов слагаемых подпространств (теорема 66.1). Тогда в силу инвариантности подпространств $L_1, \dots, L_k$ матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & & & & \\ & \boxed{A_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \boxed{A_k} & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (84.3)$$

Замечание 2. Верна и теорема, обратная доказанной.

4. Собственное подпространство.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора A . Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_0 x\}$ называется собственным подпространством оператора A , отвечающим λ_0 . $W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$.

Собственное подпространство инвариантно относительно A . Число $\dim W_{\lambda_0}$ называется геометрической кратностью собственного значения λ_0 .

Теорема. Геометрическая кратность собственного значения λ_0 не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть m и s – алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ_0 оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$.

Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора A , следовательно, можно рассматривать индуцированный оператор $A|_{W_{\lambda_0}}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \dots, e_s$ – базис W_{λ_0} . Тогда согласно (87.1) матрицей оператора $A|_{W_{\lambda_0}}$ в этом базисе будет диагональная матрица s -го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали. Следовательно, $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. Согласно теореме 86.3, $(\lambda_0 - \lambda)^s$ является делителем характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора A , но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \leq m$. ■

Теорема. Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям является прямой.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – попарно различные собственные значения оператора A . Тогда для собственных подпространств $W_1, \dots, W_{\lambda_p}$ выполнено условие прямой суммы (теорема 66.1): любая система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого W_{λ_k} , линейно независима как система собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (теорема 85.1). ■

Теорема 66.1 (критерии прямой суммы). Для подпространств $L_1, \dots, L_k$ конечномерного линейного пространства V следующие утверждения равносильны:

- 1) сумма подпространств $L_1, \dots, L_k$ – прямая;
- 2) совокупность базисов подпространств $L_1, \dots, L_k$ линейно независима;
- 3) совокупность базисов подпространств $L_1, \dots, L_k$ образует базис суммы $\sum_{i=1}^k L_i$;
- 4) $\dim \sum_{i=1}^k L_i = \sum_{i=1}^k \dim L_i$;
- 5) существует вектор $a \in \sum_{i=1}^k L_i$, для которого разложение по подпространствам $L_1, \dots, L_k$ единственно;
- 6) произвольная система ненулевых векторов $a_1, \dots, a_k$, взятых по одному из каждого подпространства L_i , $i = \overline{1, k}$, линейно независима;
- 7) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ (для $k = 2$).

16. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова). Алгоритмическая неразрешимость.

Интуитивное определение алгоритма.

Алгоритмом решения задачи называется система точно сформулированных правил, определяющих, какие действия, в какой последовательности и над какими данными надо выполнить, чтобы решить поставленную задачу.

Составить алгоритм - значит написать подробную инструкцию о том, как решать задачу, чтобы по ней мог действовать любой другой человек или автомат (например, ЭВМ), ничего не знающий о задаче и ничего не делающий сверх того, что указано в этой инструкции.

Любой алгоритм должен обладать следующими свойствами:

- **простота** (он должен быть описан ясно и понятно);
- **детерминированность** (на каждом шаге алгоритма должно быть однозначно определено, что делать дальше);
- **конечность** (за конечное число шагов он должен приводить к результату).

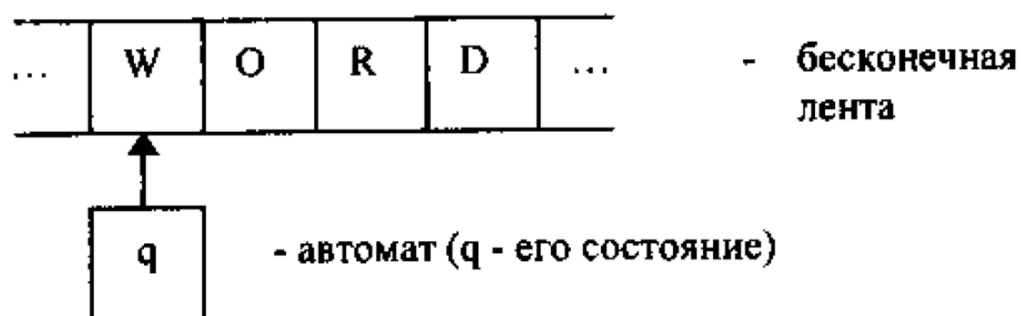
Данное определение алгоритма называется *интуитивным* - оно нестрогое, т.к. в нем используются неточные понятия (какое действие является простым? какое - понятным? и т.д.). Существуют разные способы уточнения, формализации понятия алгоритма. Ниже рассмотрены два из них: машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

Машины Тьюринга (МТ).

Английский математик Тьюринг предложил формальное определение алгоритма в виде специальной конструкции, названной позже "машиной Тьюринга".

МТ состоит из ленты и автомата. Лента бесконечна в обе стороны и делится на клетки, в каждой из которых может быть записан некоторый символ или ничего не записано (можно считать, что в пустой клетке записан символ "пусто", который обычно обозначается как λ). Автомат может двигаться вдоль ленты, может менять символы на ленте и может переходить из одного состояния в другое. В каждый момент времени автомат "видит" только одну клетку (символ в

этой клетке называется видимым) и находится в некотором состоянии (оно называется текущим).



Автомат может выполнить только следующие действия:

а) заменить видимый символ на другой (из заданного алфавита), в частности: стереть символ - т.е. заменить его на λ , ничего не менять - т.е. заменить символ на тот же самый, вписать символ в клетку - т.е. заменить λ на этот символ;

б) сдвинуться на одну клетку влево (Л), вправо (П) или остаться на месте (Н);

в) перейти в другое состояние или остаться в прежнем.

МТ работает по тактам, такты выполняются один за другим. На каждом такте автомат всегда выполняет следующие три действия в следующем порядке:

1) заменяет видимый символ на некоторый символ S ;

2) сдвигается вдоль ленты на одну клетку влево (Л), вправо (П) или остается на месте (Н);

3) переходит в состояние q .

Такт можно описать тройкой: $(S, [Л, П, Н], q)$.

МТ останавливается, если на очередном такте она ничего не меняет: не меняет видимый символ, не сдвигается и остается в прежнем состоянии. Такой такт называется тактом останова.

Чтобы описать алгоритм в виде M_1 , нужно:

а) задать алфавит - конечный набор символов $\{S_1, \dots, S_m\}$, которые будут использоваться в алгоритме (записываться на ленте);

б) задать конечный набор состояний $\{q_1, \dots, q_n\}$, в которых может находиться автомат;

в) для каждой пары (S_i, q_j) и для пар (λ, q_j) задать такт, который МТ должна выполнить, если автомат видит символ S_i или λ и находится в состоянии q_j .

Такты для каждой пары (S_i, q_j) или (λ, q_j) задаются в виде следующей таблицы, называемой программой для МТ:

	S_1	...	S_m	λ
q_1	такт	...	такт	такт
...	...	...	...	...
q_j	такт	...	такт	такт
...	...	...	...	...
q_n	такт	...	такт	такт

Алгоритм, описанный в виде МТ, выполняется следующим образом:

а) На ленте задается входное слово. "Слово" - конечная последовательность букв из алфавита. Слева и справа от слова находятся пустые клетки (символы λ), внутри слова пустых клеток быть не должно.

б) Автомат устанавливается в состояние q_1 и смотрит на клетку с самой левой буквой входного слова (либо на пустую клетку, если входное слово пусто).

в) МТ выбирает из таблицы такт в той строке, которая соответствует текущему состоянию автомата, и в том столбце, который соответствует видимому в настоящий момент символу, и выполняет этот такт.

Шаг в) повторяется до тех пор, пока не надо будет выполнить такт остановка, который ничего не меняет. Тогда МТ останавливается, а слово, которое оказывается записанным в этот момент на ленте, называется выходным словом и является результатом работы алгоритма. В этом случае алгоритм считается *применимым* к заданному входному слову.

Если МТ никогда не останавливается, считается, что данный алгоритм к заданному входному слову *неприменим*.

Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ).

Другое уточнение понятия алгоритма предложил советский математик Марков. В НАМ используется только одно действие - *подстановка*, под которой подразумевается замена части слова на новую часть. Выполнение НАМ сводится к последовательному выполнению таких подстановок.

Подстановка задается *формулой подстановки* вида $\alpha \rightarrow \beta$, где α и β - некоторые слова. Применить формулу подстановки $\alpha \rightarrow \beta$

к слову P - значит заменить ту часть слова P , что совпадает с α , на β . Например, применение формулы $c \rightarrow bb$ к слову aca даст слово $abba$.

Уточнения:

- слово α может входить в P несколько раз; в таком случае, по определению, заменяется *самое левое* вхождение α ; например, применение формулы $b \rightarrow cc$ к слову $abba$ даст слово $accca$;

- левая часть α формулы может быть пустой; в таком случае, по определению, правая часть β формулы приписывается слева к слову P ; например, применение формулы $\rightarrow t$ к слову wo даст слово two ;

- правая часть формулы также может быть пустой; тогда подстановка сводится к стиранию части слова; например, применение формулы $bb \rightarrow$ к слову $abba$ даст слово aa ;

- слово α может не входить в P , тогда формула подстановки неприменима к данному слову P .

НАМ определяется как непустой конечный набор формул подстановки вида:

$\alpha \rightarrow \beta$ (обычная формула) или

$\alpha \rightarrow \beta$ (заключительная формула).

Таким образом, НАМ - это список вида

$\alpha_1 [.] \rightarrow \beta_1$

$\alpha_2 [.] \rightarrow \beta_2$

...

$\alpha_k [.] \rightarrow \beta_k$,

где $k \geq 1$, а запись $[.]$ - означает, что "." либо есть, либо нет.

Выполняется НАМ следующим образом:

1. Задается (где-то, например на бумаге) входное слово P .
2. Формулы, входящие в состав НАМ, просматриваются сверху вниз, и выбирается первая из формул, левая часть которых входит в P . К слову P применяется эта формула, в результате чего получается некоторое новое слово P_1 .
3. а) Если на шаге 2 была применена обычная формула (без "."), то P_1 принимается за исходное слово и для него повторяется шаг 2.
б) Если же была применена заключительная формула, тогда после ее применения НАМ заканчивает свою работу, а полученное слово P_1 принимается за результат работы НАМ.
в) Если к слову P не применима ни одна из формул, тогда, по определению, алгоритм останавливается и слово P считается результатом работы НАМ.

НАМ считается *применимым* к слову P , если он через конечное число шагов заканчивает свою работу (т.е. имеет место случай 3б или 3в), и *неприменимым* - если он выполняется бесконечное число шагов (т.е. всегда имеет место случай 3а).

Принцип нормализации. Тезис Тьюринга.

Очевидно, что любой НАМ (или МТ) является алгоритмом в интуитивном смысле. Верны и обратные утверждения.

Принцип нормализации: любой алгоритм (в интуитивном смысле) может быть записан в виде НАМ.

Тезис Тьюринга: любой алгоритм может быть записан в виде программы для МТ.

Принцип нормализации (тезис Тьюринга) нельзя строго доказать, т.к. в нем используется неточное понятие "алгоритм". Однако существуют определенные доводы в пользу этого принципа (тезиса). Например, пока еще никто не смог придумать контрпример, т.е. такой алгоритм в интуитивном смысле, который нельзя было бы представить в виде НАМ (или МТ). Кроме того, доказано, что разные

уточнения понятия алгоритма эквивалентны: если алгоритм можно записать в виде НАМ, то его можно записать и в виде программы для МТ, и обратно, если алгоритм можно записать в виде программы для МТ, то его можно записать и в виде НАМ. Значит, разные способы уточнения алгоритмов ведут к одной и той же сущности, значит, в этих уточнениях схвачена суть понятия алгоритма.

Важность принципа нормализации (тезиса Тьюринга) заключается в следующем: поскольку НАМ (МТ) - точное понятие, то можно строго доказывать утверждения о несуществовании каких-то НАМ (МТ), а в силу принципа нормализации (тезиса Тьюринга) это означает, что таких алгоритмов нет вообще.

Алгоритмическая неразрешимость.

Проблема (задача) называется *алгоритмически разрешимой*, если существует алгоритм ее решения. Пример такой задачи - нахождение корней квадратного многочлена.

Проблема называется *алгоритмически неразрешимой*, если не существует алгоритма ее решения. Здесь имеется в виду, что такого алгоритма нет в принципе, а не то, что пока его никто не придумал.

Примеры алгоритмически неразрешимых проблем - проблема самоприменимости алгоритмов, проблема останова алгоритмов, проблема эквивалентности алгоритмов.

Проблема самоприменимости алгоритма.

Назовем "записью алгоритма" (НАМ) вытянутую в линию последовательность входящих в него формул подстановки, разделенных точкой с запятой:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 [.] \rightarrow \beta_1 \\ \text{НАМ: } \alpha_2 [.] \rightarrow \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_k [.] \rightarrow \beta_k \end{array}$$

Запись этого НАМ: $\alpha_1 [.] \rightarrow \beta_1; \alpha_2 [.] \rightarrow \beta_2; \dots; \alpha_k [.] \rightarrow \beta_k$

Поскольку запись алгоритма - это слово, то ее можно подать на вход самому этому алгоритму, т.е. использовать эту запись как входное слово. (Замечание: применять НАМ к самому себе нельзя, т.к. НАМ не является словом, но если вытянуть НАМ в линию, т.е. использовать его запись, то НАМ уже можно применить.) Так вот, если, начиная работать над своей записью как над входным словом, алгоритм остановится, то он называется *самоприменимым*, а если он заикнется, то он называется *несамоприменимым*.

Проблема самоприменимости алгоритма формулируется так: существует ли такой алгоритм, который по записи любого алгоритма определяет, самоприменим этот алгоритм или нет?

Доказано, что такой алгоритм не существует.

Теорема 1:

Не существует алгоритма, определяющего по изображению произвольного алгоритма, самоприменим он или несамоприменим.

Доказательство

Предположим, что такой алгоритм существует. Без потери общности можно считать его алгоритмом вычисления предиката, который по изображению любого алгоритма A вычисляет значение **истина** (да), если A самоприменим и **ложь** (нет), если A не самоприменим.

Рассмотрим алгоритм B , реализующий альтернативу :

если "алгоритм A самоприменим" **то** "бесконечный цикл" **иначе** СТОП. Здесь A - произвольный алгоритм. Вспомним, что выше было показано существование машины Тьюринга, реализующей альтернативу, при условии существования машины Тьюринга, вычисляющей значение предиката истинности условия.

Алгоритм B должен быть либо самоприменим, либо не самоприменим. Однако каждое из этих предположений оказывается ложным. Действительно, применение алгоритма B к своему собственному изображению завершается только в том случае, когда алгоритм B несамоприменим, что противоречит определению самоприменимости. Если же алгоритм B самоприменим, то применение его к собственному изображению приводит к бесконечному циклу, что противоречит предположению о самоприменимости. Полученное противоречие доказывает теорему, из которой следует Теорема 2.

Теорема 2:

Не существует алгоритма, определяющего применимость произвольного алгоритма к произвольному слову.

Доказательство

Существование такого алгоритма противоречило бы теореме 1, поскольку изображение алгоритма можно считать одним из возможных слов. И в соответствии с теоремой 1 не существует алгоритма, определяющего применимость любого алгоритма к его изображению в виде слова. Теорема 2 подтверждает невозможность в общем виде заменить заикливание алгоритмов аварийными завершениями.

Проблема останова (заикливания) алгоритмов.

Формулировка проблемы: существует ли такой алгоритм, который по записи любого алгоритма и по любому слову определяет, применим этот алгоритм к данному слову или нет (т.е. остановится он через конечное число шагов или заиклится)?

Доказано, что такой алгоритм не существует. (Если бы он существовал, то была бы разрешима проблема самоприменимости, которая является частным случаем проблемы останова алгоритмов.)

Проблема эквивалентности алгоритмов.

Два алгоритма называются эквивалентными, если они применимы к одному и тому же множеству входных слов и если при одинаковых входных словах из этого множества дают одинаковые результаты (выходные слова).

Формулировка проблемы: существует ли такой алгоритм, который по записи любых двух алгоритмов определяет, эквивалентны эти алгоритмы или нет?

Доказано, что такой алгоритм не существует.

Замечание. Алгоритмическая неразрешимость проблемы означает, что нет *единого* метода решения данной проблемы. В то же время проблема может иметь решения в частных случаях, но всё дело в том, что для разных частных случаев нужны совершенно разные методы решения.

